ゆびすま2

旭川南高等学校　　岡崎知之

0. はじめに

前回（第93回）の数実研で、有朋高校の大谷健介先生が「ゆびすま1」を発表された。身近で有名なゲームについて解析を行われたことから、発表後、多数の先生の間で話題になった。
「ゆびすま1」での大谷先生の見解は以下のとおりである。

（課題）　「ゆびすま」では、先攻・後攻のどちらが有理か？
（結論）　先攻が勝つ確率は、
　　後攻の指の本数が「0」「1」「2」のいずれかなので、1／3
後攻が勝つ確率は、
　（先攻が勝たない確率）×（後攻が勝つ確率）＝ 2／3 × 1／3 ＝ 2／9
⇒ 先攻が有理

しかし、この理論は「引き分けを考慮せず、1勝する場合」に限定したものである。
そこで、この限定条件をなくした場合について考えてみた。

1. 「ゆびすま」について

「ゆびすま」は古くから日本の学生の間で流行っていたゲームだが、「smapsmap」という番組で、紹介され、ブームが再燃したらしい。ちなみに、筆者が小学生の頃は、ゲームを行うときの掛け声から「いっせーの、で」と名付けられていたが、現在の高校生にはこの名称はまったく通じなかった。

他の指遊び同様、ローカルルールが多数存在するが、今回は以下のルールで解析を行った。

＜Rules＞
- 2人が先攻・後攻の順に交互に攻撃を行う。
- 攻撃側が指の総本数を宣言したと同時に、指を立てる。
- 宣言した総本数が、実際に立てた総本数と一致した場合、攻撃された側は手を1つ下ろす。
- 両手を下したプレイヤーが負け。

＊指は親指のみを立てることができる。ただし、両親指を立てないことも可能。

2. 課題

「ゆびすま」では、先攻・後攻のどちらが有理か？

3. 解析

プレイヤーA・Bを、それぞれ先攻・後攻とする。
プレイヤーAが m 勝 n 敗 で勝つ確率を、p_{mn} と表記すると、
起こり得るパターンは、$p_{22}, p_{21}, p_{12}, p_{02}$ のいずれかである。

解析にあたり、以下の表記を使う。

（表記）
先攻・後攻をまとめて、「セット」とよぶ。
Aの 勝ち ⇒ W　負け ⇒ L　引き分け ⇒ D

（例）	1	2	3		n	← セット数
	D　D	W　D	D　L	…	W	← 勝敗
	$\frac{2}{3}\cdot\frac{2}{3}$	$\frac{1}{3}\cdot\frac{2}{3}$	$\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{3}$	…	$\frac{1}{2}$	← 確率

＊A,Bの勝利により、確率が変動する点に注意が必要です。

（ⅰ）2勝0敗（ p_{20} ）

		m			n	← セット数
D　D	…	W　D	D　D	…	W	← 勝敗
$\frac{2}{3}\cdot\frac{2}{3}$		$\frac{1}{3}\cdot\frac{2}{3}$	$\frac{1}{2}\cdot\frac{2}{3}$	…	$\frac{1}{2}$	← 確率

$$\Rightarrow \quad p_{20} = \sum_{n=2}^{\infty}\sum_{m=1}^{n-1}\left(\left(\frac{4}{9}\right)^{m-1}\left(\frac{2}{9}\right)\left(\frac{1}{3}\right)^{n-(m+1)}\left(\frac{1}{2}\right)\right)\cdots(●)$$

$$= \sum_{n=2}^{\infty}\left(\frac{3}{4}\left(\frac{1}{3}\right)^{n}\sum_{m=1}^{n-1}\left(\frac{4}{3}\right)^{m}\right)$$

$$= \sum_{n=2}^{\infty}\left(\left(\frac{4}{9}\right)^{n-1}-\left(\frac{1}{3}\right)^{n-1}\right)$$

$$p_{20} = \frac{3}{10}$$

（ｉｉ）2勝1敗（ p_{21} ）

α） 各セットにDを含む（WLがない）場合

$$
\begin{array}{cccccccccccc}
 & & & l & & & & m & & & n & \leftarrow \text{セット数} \\
\underline{D\ \ D} & \cdots & \underline{D\ \ L} & & \underline{D\ \ D} & \cdots & \underline{W\ \ D} & & \underline{D\ \ D} & \cdots & \underline{W} & \leftarrow \text{勝敗} \\
\frac{2}{3}\cdot\frac{2}{3} & & \frac{2}{3}\cdot\frac{1}{3} & & \frac{2}{3}\cdot\frac{1}{2} & \cdots & \frac{1}{3}\cdot\frac{1}{2} & & \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2} & & \frac{1}{2} & \leftarrow \text{確率}
\end{array}
$$

または

$$
\begin{array}{cccccccccccc}
 & & & l & & & & m & & & n & \leftarrow \text{セット数} \\
\underline{D\ \ D} & \cdots & \underline{W\ \ D} & & \underline{D\ \ D} & \cdots & \underline{D\ \ L} & & \underline{D\ \ D} & \cdots & \underline{W} & \leftarrow \text{勝敗} \\
\frac{2}{3}\cdot\frac{2}{3} & & \frac{1}{3}\cdot\frac{2}{3} & & \frac{1}{2}\cdot\frac{2}{3} & \cdots & \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{3} & & \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2} & & \frac{1}{2} & \leftarrow \text{確率}
\end{array}
$$

いずれも積の順序が入れ替わっただけで、値は同じ。よって

$$\Rightarrow\quad 2\sum_{n=3}^{\infty}\sum_{m=2}^{n-1}\sum_{l=1}^{m-1}\left(\left(\frac{4}{9}\right)^{l-1}\left(\frac{2}{9}\right)\left(\frac{1}{3}\right)^{m-(l+1)}\left(\frac{1}{6}\right)\left(\frac{1}{4}\right)^{n-(m+1)}\left(\frac{1}{2}\right)\right)\quad\cdots（☆）$$

$$= 2\sum_{n=3}^{\infty}\sum_{m=2}^{n-1}\left(2\left(\frac{1}{4}\right)^{n}\left(\left(\frac{4}{3}\right)^{2m-1}-\left(\frac{4}{3}\right)^{m}\right)\right)$$

$$= 2\sum_{n=3}^{\infty}\left(\frac{27}{14}\left(\left(\frac{4}{9}\right)^{n}-\left(\frac{16}{9}\right)^{2}\left(\frac{1}{4}\right)^{n}\right)-6\left(\left(\frac{1}{3}\right)^{n}-\left(\frac{4}{3}\right)^{2}\left(\frac{1}{4}\right)^{n}\right)\right)$$

$$=\frac{2}{15}$$

β） あるセットにWLを含む場合

$$
\begin{array}{cccccccc}
 & & & m & & & n & \leftarrow \text{セット数} \\
\underline{D\ \ D} & \cdots & \underline{W\ \ L} & & \underline{D\ \ D} & \cdots & \underline{W} & \leftarrow \text{勝敗} \\
\frac{2}{3}\cdot\frac{2}{3} & & \frac{1}{3}\cdot\frac{1}{3} & & \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2} & \cdots & \frac{1}{2} & \leftarrow \text{確率}
\end{array}
$$

$$\Rightarrow\quad \sum_{n=2}^{\infty}\sum_{m=1}^{n-1}\left(\left(\frac{4}{9}\right)^{m-1}\left(\frac{1}{9}\right)\left(\frac{1}{4}\right)^{n-(m+1)}\left(\frac{1}{2}\right)\right)\quad\cdots（★）$$

$$=\sum_{n=3}^{\infty}\left(\frac{9}{14}\left(\frac{4}{9}\right)^{n}-\frac{8}{7}\left(\frac{1}{4}\right)^{n}\right)$$

$$=\frac{2}{15}$$

以上より

$$p_{21}=\frac{2}{15}+\frac{2}{15}=\frac{4}{15}$$

(iii)1勝2敗(p_{12})

α) 各セットにDを含む(WLがない)場合

		l			m			n	← セット数
D D	⋯	W D	D D	⋯	D L	D D	⋯	E L	← 勝敗
$\frac{2}{3}\cdot\frac{2}{3}$		$\frac{1}{3}\cdot\frac{2}{3}$	$\frac{1}{2}\cdot\frac{2}{3}$	⋯	$\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{3}$	$\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}$		$\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}$	← 確率

または

		l			m			n	← セット数
D D	⋯	D L	D D	⋯	W D	D D	⋯	E L	← 勝敗
$\frac{2}{3}\cdot\frac{2}{3}$		$\frac{2}{3}\cdot\frac{1}{3}$	$\frac{2}{3}\cdot\frac{1}{2}$	⋯	$\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}$		$\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}$	← 確率

いずれも積の順序が入れ替わっただけで、値は同じ。
また、これらの計算式はp_{21} のαのパターン(☆)の計算式と比べて
最後の1／2が1／4に変化しただけである。よって、 $\frac{2}{15}\cdot\frac{1}{2}=\frac{1}{15}$

β) あるセットにWLを含む場合

		m			n	← セット数
D D	⋯	W L	D D	⋯	E L	← 勝敗
$\frac{2}{3}\cdot\frac{2}{3}$		$\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{3}$	$\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}$	⋯	$\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}$	← 確率

または

		m			n	← セット数
D D	⋯	D L	D D	⋯	W L	← 勝敗
$\frac{2}{3}\cdot\frac{2}{3}$		$\frac{2}{3}\cdot\frac{1}{3}$	$\frac{2}{3}\cdot\frac{1}{2}$	⋯	$\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{2}$	← 確率

(上段)…この計算式もp_{21} のβのパターン(★)の計算式と比べて最後の1／2が1／4に変化
したただけである。よって、 $\frac{2}{15}\cdot\frac{1}{2}=\frac{1}{15}$
(下段)…この計算式はp_{20} のパターン(●)の計算式と比べて最後の1／2が1／6に変化
しただけである。よって、 $\frac{3}{10}\cdot\frac{1}{3}=\frac{1}{10}$

以上より

$$p_{12}=\frac{1}{15}+\frac{1}{15}+\frac{1}{10}=\frac{7}{30}$$

(iv)0勝2敗（ p_{02} ）

$$
\begin{array}{ccccccccc}
 & & \text{m} & & & & \text{n} & & \leftarrow \text{セット数} \\
\underline{\text{D}\quad\text{D}} & \cdots & \underline{\text{D}\quad\text{L}} & & \underline{\text{D}\quad\text{D}} & \cdots & \underline{\text{D}\quad\text{L}} & & \leftarrow \text{勝敗} \\
\frac{2}{3}\cdot\frac{2}{3} & & \frac{2}{3}\cdot\frac{1}{3} & & \frac{2}{3}\cdot\frac{1}{2} & \cdots & \frac{2}{3}\cdot\frac{1}{2} & & \leftarrow \text{確率}
\end{array}
$$

この計算式は p_{20} のパターン（●）の計算式と比べて
最後の1／2が1／6に変化しただけである。よって、

$$p_{02}=\frac{3}{10}\cdot\frac{2}{3}=\frac{1}{5}$$

4.たしかめ

$$p_{20}+p_{21}+p_{12}+p_{02}=\frac{3}{10}+\frac{4}{15}+\frac{7}{30}+\frac{1}{5}=\frac{9+8+7+6}{30}=\frac{30}{30}$$

5.結論

「ゆびすま」の先攻における勝敗率は以下のとおりである

勝敗	確率	百分率（近似値）
2勝0敗	3／10	30％
2勝1敗	4／15	27％
1勝2敗	7／30	23％
0勝2敗	1／5	20％

したがって、

「ゆびすまでは、先攻が有利である。」

（先攻の勝利確率 ： 後攻の勝利確率　＝　17 ： 13　＝　1.3 ： 1　）

6. 感想

・高校数学の問題のほとんどは、「引き分けなし」だが、「引き合わけあり」にした場合の論理と計算の複雑さが体感できた

・毎回楽しい話題を提供してくれる大谷先生は「ネタの宝石箱」だと思った。

・課題レベルとしては理数科の生徒なら取り組めそうなので、よろしければ使ってください。
（今回はオリジナル解析ですが、もちろん著作権フリーです。）

大谷先生、ネタをおいしくいただきました。またよろしくお願いします！

（参考資料）

「ゆびすま1」（大谷健介先生　第93回数実研レポート）

（協力）

大谷健介先生（ネタ提供）

数学研究部「あるご」部員の皆さん（実験協力）

岡崎凛（論理展開チェック）

（2015 年 10 月 3 日数学教育実践研究会にて発表）