$a_1 + a_2 > a_3 + a_4$

旭川南高等学校　　岡崎知之

0. はじめに

昨年の冬、本校に留学していた中国人留学生から、東京工業大学入試問題の過去問の解答作成を依頼された。60分3問構成だが、特段特別な問題もなく解き進むことができたのだが、ある1問で手が止まった。それは、次の問題だった。

「n個の整数　1, 2, 3, …, n　のうちの1個を無作為に選ぶ」という試行を4回繰り返す。
i 回目に選んだ数を a_i としたとき、

$a_1 + a_2 - a_3 - a_4 > 0$ となる確率を求めよ。

（平成25年度　東京工業大学　私費留学生特別入試問題　[1]）

条件はいたってシンプル。しかし取り組んでみると、意外に手間がかかる。
私はこの問題に次第に魅了されていった。

1. 問題解釈の問題

この問題を解く際、実は問題解釈の点で迷いが出た。

「整数を選ぶ際に、重複は許されるのか？」という点である。

入試問題では、重複を許さないときに整数をカードに置き換えているが、この問題ではその配慮はない。本校の数学教諭にも意見を伺ったが、回答は分かれた。
そこで、問題を重複可・重複不可の場合に分け、比較してみた。
（どちらの解釈が受験問題として適切か？その答はレポートの最後で！）

2. 問題に取り掛かる前に

条件を満たす4数の組み合わせを考えると複雑なので、

$a_1 + a_2 - a_3 - a_4 > 0$　を　$\boxed{a_1 + a_2 > a_3 + a_4}$　として、

2数ずつに分けて考えることとする。

3. 重複を許さない場合(漸化式バージョン　by 岡崎)

<分母について>

${}_nP_4$　である。

<分子について>

条件を満たす4数のパターンを p_n とする。
すると、p_{n+2} について

1　2　…　n+1 n+2
○ ○　…　○　○　と考えると

i) 両端を4数として選ばないとき

1　2　…　n+1 n+2
○ ○　…　○　○　　$\Rightarrow\ 2p_{n+1}-p_n$

p_{n+1}　　p_{n+1}

p_n

ii) (i) 以外のとき

A)　両端が a_1 , a_2 の場合
斜線部(α)が存在領域。

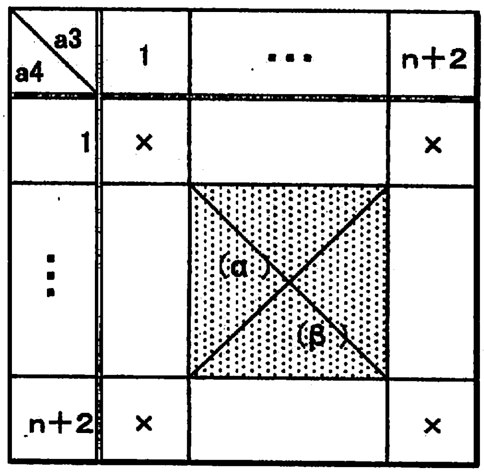
a) n が偶数ならば

$$2\times\left(\sum_{k=1}^{n-1}k-\frac{n}{2}\right)=n(n-2)$$

b) n が奇数ならば

$$2\times\left(\sum_{k=1}^{n-1}k-\frac{n}{2}+1\right)=n(n-2)+2$$

*「2」…a_1 , a_2 の順列
「Σ」…斜線部分を俵算で計算
「$\frac{n}{2}$」「+1」… a3 = a4　の個数



*右下がりのラインは　a3=a4
左下がりのラインは　a3+a4=n+3　を示す

B) 両端が a_3 , a_4 の場合
斜線部(β)が存在領域

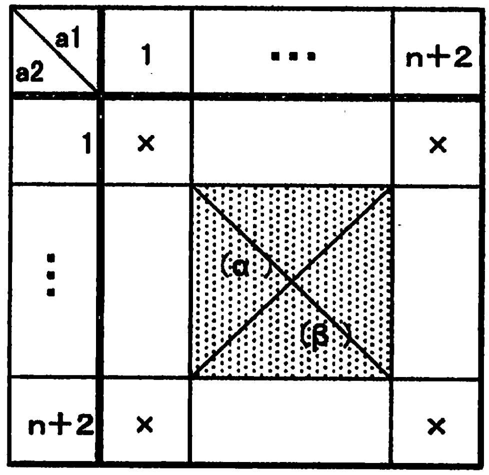
これは、(A)と同様のパターン数になる
よって、

a)n が偶数ならば

$2\times\left(\sum_{k=1}^{n-1}k-\frac{n}{2}\right)=\mathrm{n}(n-2)$

b)n が奇数ならば

$2\times\left(\sum_{k=1}^{n-1}k-\frac{n}{2}+1\right)=\mathrm{n}(n-2)+2$



＊右下がりのラインは a3=a4
左下がりのラインは a3+a4=n+3 を示す

C)左端が $a_1(a_2)$ かつ 右端が $a_3(a_4)$ のとき

すべて不適となる。

(例)左端が a_1 、右端が a_3 の場合

a_1+a_2 の最大値は 1+(n+1)=n+2
a_3+a_4 の最小値は (n+2)+2=n+4 よって任意のnについて、題意に適さない。

D)左端が $a_3(a_4)$ かつ 右端が $a_1(a_2)$のとき

(C)の逆パターンなので、すべて適する。

$\Rightarrow\ 4\times{}_nP_2=4n(n-1)$

＊「4」 …両端の順列
「${}_nP_2$ 」…両端以外の順列

以上より

nが偶数のとき

$\Rightarrow\ p_{n+2} = 2p_{n+1} - p_n + 4n(n-1) + 2n(n-2)$

$\qquad = 2p_{n+1} - p_n + 2n(3n-4)$

nが奇数のとき

$\Rightarrow\ p_{n+2} = 2p_{n+1} - p_n + 2n(3n-4) + 2$

この漸化式を利用して、一般項を求める。

＜nが偶数のとき＞

n＝2m＋2 ⇒ $p_{2m+4} = (2p_{2m+3} - p_{2m+2}) + 8(m+1)(3m+1)$ …(1)

n＝2m＋4 ⇒ $p_{2m+6} = (2p_{2m+5} - p_{2m+4}) + 8(m+2)(3m+4)$ …(2)

n＝2m＋5 ⇒ $p_{2m+5} = (2p_{2m+4} - p_{2m+3}) + 2(2m+3)(6m+5) + 2$ …(3)

以後、計算過程が複雑なので、アルゴリズムのみ記述します。

① p_7 を未知数と見なすと、5種の未知数に対し、方程式が3つあるので、
未知数を2種消去することが可能。そこで、奇数項である p_{2m+3} , p_{2m+5} を消去。

④ 以下の3項間漸化式が完成。

$(p_{2m+6} - p_{2m+4}) = (p_{2m+4} - p_{2m+2}) + f(m)$

⑤ (　　)内を階差数列と見なし、一般項を求める。

その結果

$p_{2m+2} = 8 + \frac{4}{3}(m-1)(6m^3 + 10m^2 + 7m + 6)$ …(☆)

n = 2m + 2 より $m = \frac{n-2}{2}$ を代入して

$$\boxed{p_n = \frac{1}{6}n(n-2)(3n^2 - 14n + 14)}$$

となる。

＜nが奇数のとき＞

(☆)を利用して、p_{2m+2} , p_{2m+4} を(1)に代入すれば、p_{2m+3} を求めることができる。

$$\boxed{p_n = \frac{1}{6}(n-1)(n-3)(3n^2-8n+1)}$$

4.重複を許さない場合(推測バージョン　by 宮野)

この問題の解法について、留萌高校の宮野昌彦先生に別解をいただいた。

①　各 n に対する全パターンを調べてみる。

n=4　のとき

1, 2, 3, 4

a1,a2		a3,a4		
1	2	3	4	×
1	3	2	4	×
1	4	2	3	△
2	3	1	4	△
2	4	1	3	○
3	4	1	2	○

n=5　のとき

2, 3, 4, 5

a1,a2		a3,a4		
2	3	4	5	×
2	4	3	5	×
2	5	3	4	△
3	4	2	5	△
3	5	2	4	○
4	5	2	3	○

1, 3, 4, 5

a1,a2		a3,a4		
1	3	4	5	×
1	4	3	5	×
1	5	3	4	×
3	4	1	5	○
3	5	1	4	○
4	5	1	3	○

1, 2, 4, 5

a1,a2		a3,a4		
1	2	4	5	×
1	4	2	5	×
1	5	2	4	△
2	4	1	5	△
2	5	1	4	○
4	5	1	2	○

1, 2, 3, 5

a1,a2		a3,a4		
1	2	3	5	×
1	3	2	5	×
1	5	2	3	○
2	3	1	5	×
2	5	1	3	○
3	5	1	2	○

1, 2, 3, 4

a1,a2		a3,a4		
1	2	3	4	×
1	3	2	4	×
1	4	2	3	△
2	3	1	4	△
2	4	1	3	○
3	4	1	2	○

② （左の2数）＞（右の2数）　⇒「〇」
（左の2数）＝（右の2数）　⇒「△」
（左の2数）＜（右の2数）　⇒「×」　と表記すると、以下の法則が推測される。

p <q <r <s

a1,a2		a3,a4			
p	q	r	s	×	
p	r	q	s	×	
p	s	q	r	p+s=q+r → 〇なし	
q	r	p	s	p+s≠q+r → 〇×1	
q	s	p	r	〇	
r	s	p	q	〇	

n	〇×2	〇×3	組の合計	〇の合計
4	1	0	1	2
5	3	2	5	12
6	7	8	15	38
7	13	22	35	92
8	22	48	70	188
9	34	92	126	344
10	50	160	210	580
11	70	260	330	920

↑
階差数列は、2, 4, 6, 9, 12, …

上記の階差数列は、

A） nが偶数　n=2(m+1)　のとき
$b_n = 2(1+2+\cdots+m) = \frac{1}{4}n(n-2)$

B） nが奇数　n=2(m+1)+1　のとき
$b_n = 2(1+2+\cdots+m)+(m+1) = \frac{1}{4}(n-1)^2$　であることが推測される。

③ ②の階差数列から、〇×2の　パターン数 a_n を求める。

A） nが偶数のとき　$a_n = \frac{1}{24}n(n-2)(2n-5)$
B） nが奇数のとき　$a_n = \frac{1}{24}(n-1)(n-3)(2n-1)$

④　a_n を利用して、〇の合計を求める。

〇×3の組数は　${}_nC_4\ - a_n$ なので、

〇の合計は

$$2a_n + 3({}_nC_4\ - a_n) = 3\,{}_nC_4\ - a_n$$

②の結果を代入すると、

A)　nが偶数のとき　$\frac{1}{24}n(n-2)(3n^2-14n+14)$

B)　nが奇数のとき　$\frac{1}{24}(n-1)(n-3)(3n^2-8n+1)$

⑤　④の結果を、順列を考え4倍すると、漸化式バージョンと一致する。

5. 重複を許さない場合（補足）

ところで、nが偶数のときの「確率」は

$$\frac{p_n}{{}_nP_4} = \frac{n(n-2)(3n^2-14n+14)}{6n(n-1)(n-2)(n-3)} = \frac{3n^2-14n+14}{6(n-1)(n-3)} = \frac{3-\frac{14}{n}+\frac{14}{n^2}}{6\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{2}{n}\right)}$$

となり、n→∞とすると確率は50％に近づくことが分かる。

6. 重複を許す場合

例えば　n＝6の場合で考える。

網掛けの部分を含まない左上の領域の最大値を「下位群」
網掛けの部分を含む右下の領域を「上位群」

と呼ぶことにする。

	1	2	3	4	5	6
1	2	3	4	5	6	7
2	3	4	5	6	7	8
3	4	5	6	7	8	9
4	5	6	7	8	9	10
5	6	7	8	9	10	11
6	7	8	9	10	11	12

すると、条件を満たす組み合わせの数は

（上位群）×（下位群）　で求められる。

~~下位群を左上から順に　　2　→(2,3,3,)→(2,3,3,4,4,4,)と広げていくと~~

上位群の個数	35	33	30	…	1
下位群の個数	1	~~3~~ 2	~~6~~ 3	…	~~35~~ 2

~~下位群の個数を a_k (1≦k≦5)とすると、~~

~~$a_k=\frac{1}{2}k(k+1)$　であり、表の対称性を考慮すると、~~

全パターンは　$\sum_{k=1}^{5} k\{36-\frac{1}{2}k(k+1)\}+\sum_{k=2}^{6} k\{\frac{1}{2}(k-1)k\}$

~~$2\left(\sum_{k=1}^{5}\left(\frac{1}{2}k(k+1)\right)\left(36-\frac{1}{2}k(k+1)\right)\right)$~~　となる。これを任意のnについて一般化すればよい。

7, 結論（重複を許すのか、許さないのか）

2つの解釈を試してみたところ、「重複なし」の解答は相当な時間がかかり、20分以内に解くのは困難である。「重複あり」と考えるのが妥当ではないだろうか。

8. 感想

・この問題については、多数の先生方から別解や解法のヒントを教えていただいた。
シンプルかつ奥が深い問題がもつ魅力をあらためて感じることができた。（数学ってすごい！）
助言を下さった先生方、本当にありがとうございました。（また懲りずに付き合ってください！）

・長い計算を経て一般項を得たが、計算ミスにより実際のパターン数が合わなかったとき、「アルゴリズム自体に不備があったらどうしよう。」という不安感に何度も襲われた。
しかし、途中式を実際のパターンと照合することによって、ミスを発見することができた。
こういう手法を身につけることは、数学に関わる者にとって大切なことだと感じた。
生徒にも、「間違いを発見する」ことや遠回りでもいいから「自分の解法を見つける」姿勢を伝えたいと思う。

（参考資料）
平成25年度　東京工業大学　私費留学生特別入試問題

（協力）
宮野昌彦先生（留萌）　佐々木崇裕先生（旭川北）　沢口聡先生（旭川南）　穴口透先生（旭川南）
その他旭川南高校の先生方

（2015 年 6 月 6 日数学教育実践研究会にて発表）