公式説明の簡潔化（「点と直線の距離」編）

旭川南高等学校　　岡崎知之

０．はじめに

現在、高等数学の授業の展開法としては、「導入→公式・定理の説明→利用例の紹介→演習」が一般的であるが、おそらく最後の「演習」の時間を確保したい先生が多いのではなかろうか。
そのためには「公式・定理の説明」をいかにエレガントで分かりやすく行うかが重要になる。

今回のレポートでは、生徒に「説明が長い！」と思われていそうな公式を挙げ、私の説明と教科書の説明の量を比較してみた。今回挙げたもの以外にも挑戦してみたい公式・定理があるので、今後良い方法が見つかった際や、実践結果がまとまった際には発表の機会を持ちたいと考えている。

１．「点と直線との距離」

（１）点が原点の場合

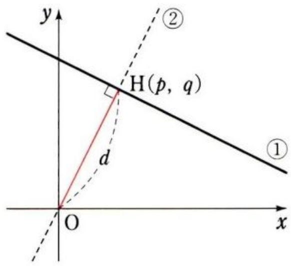
原点Oと次の直線の距離 d を求めてみよう。

$$ax+by+c=0 \quad \cdots\cdots ①$$

Oを通り直線①に垂直な直線は

$$bx-ay=0 \quad \cdots\cdots ②$$

で表される。2 直線①，②の交点を $\mathrm{H}(p,\ q)$ とすると



$$p=-\frac{ac}{a^2+b^2},\quad q=-\frac{bc}{a^2+b^2}$$

←①，②を連立させた方程式を解いた。

$d=\mathrm{OH}$ であるから

$$d=\sqrt{p^2+q^2}=\sqrt{\frac{c^2(a^2+b^2)}{(a^2+b^2)^2}}=\frac{\sqrt{c^2}}{\sqrt{a^2+b^2}}$$

$$=\frac{|c|}{\sqrt{a^2+b^2}}$$

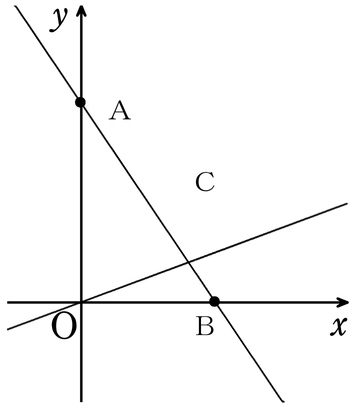
よって，次のことが成り立つ。

原点と直線 $ax+by+c=0$ の距離 d は

$$d=\frac{|c|}{\sqrt{a^2+b^2}}$$

見かけ上はコンパクトにまとまっているが、授業で説明する際には「直線②の求め方」「交点Ｈを求める計算過程」を追加しなければならず、上記のおよそ１．５～２倍の説明となる。

（別説明①）



△ＡＢＣ＝ $\frac{1}{2}\mathrm{OB}\cdot\mathrm{OA}=\frac{1}{2}\mathrm{AB}\cdot\mathrm{OC}$

$\mathrm{OB}\cdot\mathrm{OA}=\mathrm{AB}\cdot\mathrm{OC}$ ⋯（＊）

ここで、

$ax+by+c=0$ に

$x=0$ を代入して　$\mathrm{A}(0,-\frac{c}{b})$

$y=0$ を代入して　$\mathrm{B}(-\frac{c}{a},0)$

よって　$\mathrm{AB}=\sqrt{\frac{c^2}{a^2}+\frac{c^2}{b^2}}=|c|\sqrt{\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}}=|c|\sqrt{\frac{a^2+b^2}{a^2b^2}}=\left|\frac{c}{ab}\right|\sqrt{a^2+b^2}$

これらを（＊）に代入すると

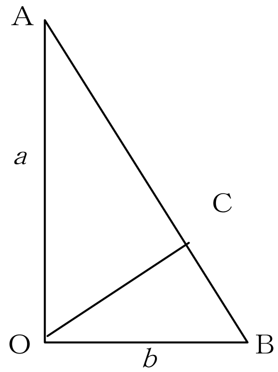
$\left|\frac{c^2}{ab}\right|=\left|\frac{c}{ab}\right|\sqrt{a^2+b^2}\cdot OC$　⋯②

$|\,c\,|=\sqrt{a^2+b^2}\cdot OC$　　⋯②×$\left|\frac{ab}{c}\right|$

$\mathrm{OC}=\frac{|c|}{\sqrt{a^2+b^2}}$

説明の重点を「三角形の３辺の長さ」に置き換えることにより、「垂線を求める」「２直線の交点を求める」作業をなくした。但し、ルートの外し方など計算においては慎重さを要することから、学力の高い生徒向けの説明かもしれない。

（補題）



直角三角形の斜辺（ＡＢ）を底辺と見なしたときの高さ（ＯＣ）は

$\mathrm{OB}\cdot\mathrm{OA}=\mathrm{AB}\cdot\mathrm{OC}$

$OC=\frac{OA\cdot OB}{AB}=\frac{ab}{\sqrt{a^2+b^2}}=\frac{1}{\sqrt{\frac{a^2+b^2}{a^2b^2}}}$

$$\boxed{OC=\frac{1}{\sqrt{\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}}}}$$

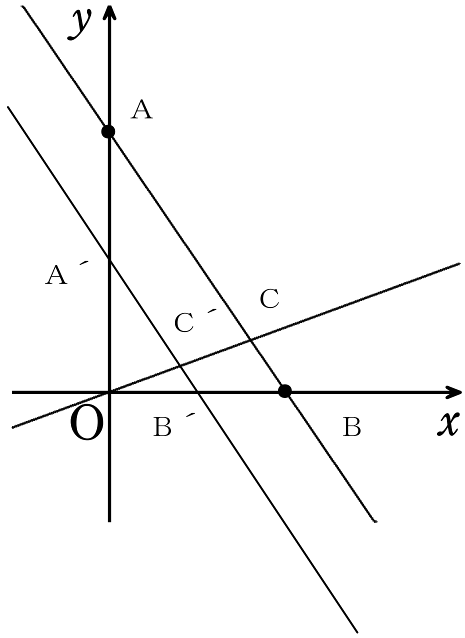
←公式ゲット！

（別説明②）　＊補題を前提とした説明

$ax+by+c=0$ に

$x=0$ を代入して　$\mathrm{A}(0,-\frac{c}{b})$

$y=0$ を代入して　$\mathrm{B}(-\frac{c}{a},0)$



ここで、△ＯＡＢを$\frac{1}{|c|}$ に縮小した

△ＯＡ´Ｂ´を考えると、…（☆）

$OA´=\left|\frac{1}{a}\right|$　，$OB´=\left|\frac{1}{b}\right|$　となるので

補題から

$OC´=\frac{1}{\sqrt{a^2+b^2}}$

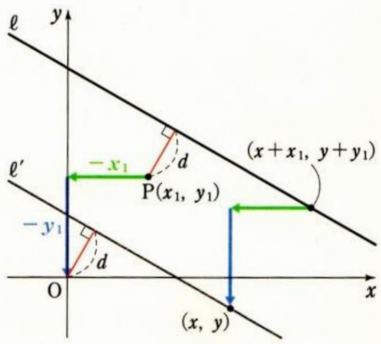
（☆）より

$\mathrm{OC}=\frac{|c|}{\sqrt{a^2+b^2}}$

幾何学的に考えるとさほど難しい理論ではないが、代数的に解くと変数の計算が複雑になるので、三角形を縮小→拡大し処理してみた。

（２）点が任意の点の場合

次に，点$\mathrm{P}(x_1,\ y_1)$と直線 $ax+by+c=0$ の距離dを求めてみよう。直線 $ax+by+c=0$ をℓとする。



点Pと直線ℓの両方を，点Pが原点に重なるように平行移動し，移動後の直線をℓ'とする。ℓ'上のどんな点$(x,\ y)$に対しても，点$(x+x_1,\ y+y_1)$がℓ上にあることから

$a(x+x_1)+b(y+y_1)+c=0$

が成り立つ。

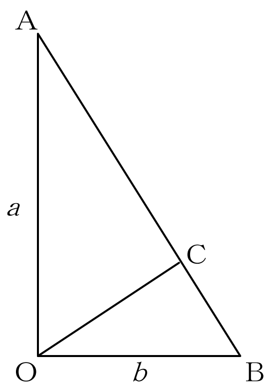
すなわち　$ax+by+(ax_1+by_1+c)=0$

これがℓ'の方程式である。原点と直線ℓ'の距離は$\frac{|ax_1+by_1+c|}{\sqrt{a^2+b^2}}$で，これが求める$d$に等しいので，次のことが成り立つ。

平行移動で任意の点を原点に移動し、先ほどの公式を利用するという考えは
我々教員にとっては一般的な方法だが、この段階での「平行移動」は軌跡の
考え方を先取りしており、生徒にとっては理解が難しい。

教科書より説明は長くなってしまうが、先ほどの補題を利用すると、

（別説明③）



$O(x_1, y_1)$ とすると

右図において

$A\left(x_1, \frac{c-ax_1}{b}\right)$, $B\left(\frac{c-by_1}{a}, y_1\right)$

よって

$$OA = \left|\frac{-ax_1-c}{b} - y_1\right| = \left|\frac{-ax_1-by_1-c}{b}\right| = \left|\frac{ax_1+by_1+c}{b}\right| = \left|\frac{d}{b}\right|$$

$$OB = \left|\frac{-by_1-c}{a} - x_1\right| = \left|\frac{-ax_1-by_1-c}{a}\right| = \left|\frac{ax_1+by_1+c}{a}\right| = \left|\frac{d}{a}\right| \quad * \ d = ax_1 + by_1 + c$$

これらを補題に代入して

$$\mathrm{OC} = \frac{1}{\sqrt{\frac{\mathrm{b}^2}{\mathrm{d}^2}+\frac{\mathrm{a}^2}{\mathrm{d}^2}}} = \frac{|\mathrm{d}|}{\sqrt{\mathrm{a}^2+\mathrm{b}^2}} = \frac{|ax_1+by_1+c|}{\sqrt{a^2+b^2}}$$

２．最後に

教科書の説明は「垂線を求め、交点を求め、距離を計算する」という
それまでの単元で学んだ公式をフル活用する内容になっており、また代数計算
のレベルも高いため、生徒の学力によっては理解しづらいものとなっている。

私の説明も幾何学を利用して計算を減らしたものの、発想の部分の説明が必要で、
生徒によっては既習の公式を利用するほうが分かりやすいかもしれない。

説明が難しい公式は、「教科書の説明に頼っちゃおう！」という甘えが自分に
あったが、今回の試みをきっかけに基本公式を見つめなおしていきたいと思う。

（参考資料）
高等学校「数学Ⅱ」（数研出版）

（2014 年 8 月 9 日数学教育実践研究会にて発表）