大゛数(ダイス)の法則

旭川南高等学校　岡崎知之

大数の法則を実感するために、「クラスの生徒全員にサイコロをふらせて、確率が収束することを確かめる」という実験を行っているという話をしばしば聞くことがある。

かく言う私もやってみたことがあるのだが、収束しなかったときの不安と大数の法則を説明できる自信がなかったことから、それ以来この実験は行っていない。

１０年研修を迎えた今、大数の法則に関する個人的な疑問に挑んでみたい。

＜Problem＞

１．サイコロの１／6実験に必要な試行回数は？
２．大数の法則の数学的説明
３．確率実験により確率を推定する方法は？

１．サイコロの１／6実験に必要な試行回数は？

この実験を成功させるには、2つの関門をクリアする必要がある。

① 使用するサイコロが、本当に「同様に確からしい」のか。

② 説得力を持たせるほどの収束には、どれだけの試行回数が必要なのか。

①についてはProblem3で解決するので、ここでは②について説明します。
（ちなみに、同様に確からしいサイコロは「世界最速のサイコロ」という商品名で
販売されています。時価2．5万円。）

サイコロを n 回投げたとき、特定の目が r 回出現する確率 P_r は

$P_r = {}_nC_r \left(\frac{1}{6}\right)^r \left(\frac{5}{6}\right)^{n-r}$ で表される。言い換えると、この実験は二項分布B（n, $\frac{1}{6}$ ）に従う。

二項分布のままだと計算に都合が悪いので、標準正規分布として近似する。

＊近似の方法…確率変数 $\mathrm{Z} = \frac{X-np}{\sqrt{npq}}$ を用意すると、nが大きいとき、Zは近似的に

標準正規分布 N（0, 1）に従う。

例）サイコロ実験を720回行ったとき、1の目が100～150回となる確率は？

先ほどの確率変数 Z に n＝720, $p=\frac{1}{6}$, $q=\frac{5}{6}$ を代入すると、

$Z=\frac{X-120}{10}$ となり、Zは近似的に標準正規分布に従う。

よって、

$$\mathrm{P}(100 \leq X \leq 150)=\mathrm{P}(\frac{100-120}{10} \leq Z \leq \frac{15--120}{10})$$
$$=\mathrm{P}(-2 \leq Z \leq 3)=\mathrm{p}(2)+\mathrm{p}(3)$$ ← p については正規分布表で調べる
$$=0.4772+0.4897=0.9759$$

<u>答） 約97．6%</u>

非常に高い数値と言えるが、仮に1の目が100回出た場合 100／720≒13．8%となり、1／6≒16．7%との差は3%もある。100～150の幅は大きすぎる。

そこで、確率1／6と実験で得られる確率との差を1%以内、
すなわち理論値約16．7%に対し、実験値約16．5%～16．9%になる確率が
95%以上になるような試行回数を調べてみると、

$$\mathrm{P}\left(\left|X-\frac{n}{6}\right| \leq \frac{0.01}{6}n\right)=P(-\frac{0.01}{6}n \leq X-\frac{n}{6} \leq \frac{0.01}{6}\mathrm{n})$$

$$=\mathrm{P}\left(-\frac{\sqrt{n}}{100\sqrt{5}} \leq Z \leq \frac{\sqrt{n}}{100\sqrt{5}}\right)=2p(\frac{\sqrt{n}}{100\sqrt{5}}) \geq 0.95$$

すなわち、$\mathrm{p}(\frac{\sqrt{n}}{100\sqrt{5}}) \geq 0.475$

正規分布表を用いて、$\frac{\sqrt{n}}{100\sqrt{5}} \geq 1.96$

これを解いて、$\mathrm{n} \geq 50000 \times 1.96^2=192000.8$ となる。

40人学級では**1人5000回程度**サイコロを振らせればよいことが分かる。

50分授業では実現困難な数値である。
（少し妥協して差を10%程度（約15%～18．4%）にすれば、500回で済む、が。）

２．　大数の法則の数学的説明

１の結果より、50分授業で１／６≒１６％を実証すると、失敗する可能性もある
ことが分かった。
その場合、理論的には「無作為標本の数が少なかった」という原因追及がないと
釈然としない。
そもそもこの実験を行う目的は、「確率なんて当たるか当たらないかでしょ？」
という生徒に対し、確率論によってリスク回避が可能であることを伝えることである。
その前提となるのが「大数の法則」である。
古い教科書にはこのように記述されている。

母平均 m の母集団から大きさ n の無作為標本を抽出するとき、
その標本平均 $\bar{X}$ は、n が十分に大きいとき、<u>近似的に正規分布に</u>
<u>したがう</u>。

よって、n を大きくすればするほど
一定である期待値に対し<u>標準偏差は小さくなる</u>ので、$\bar{X}$ の分布は
<u>期待値の周辺に集中し</u>、先ほどのサイコロ実験のように理論値と実験値の差を小さく
しても、その確率に収束する確率は１に近づく。

言葉で書くと分かりずらいが、正規分布をグラフなどで表示すればイメージは
伝えられると思う。

３．　確率実験より確率を推定するには

サイコロで特定の目が出る確率が「同様に確からしい」かどうかは、
検定によって調べることもできる。

例）サイコロを600回投げて1の目の出る確率が70回出た。
　このサイコロは確率が1／6ではないと判断してよいか。

　１の目が出る確率をpとし、仮説p＝1／6を<u>危険率0．05</u>で検定する。
　１の目が出る回数をXとすると、Xは2項分布 $\mathrm{B}(600,\frac{1}{6})$ に従う。

　この分布を正規分布 $\mathrm{N}(\mathrm{m},\sigma^2)$ で近似すると、

$m=600\times\frac{1}{6}=100$

$\sigma=\sqrt{100\times\frac{1}{6}\times\frac{5}{6}}=3.73$

正規分布表から

$P(100-1.96\times3.73\leq X\leq100+1.96\times3.73)=0.95$

$P(92.690\leq X\leq107.311)=0.95$

Xは整数値をとるので、危険率5%の棄却域は

$X\leq92$ ，$108\leq X$ となり、

１の目が出た回数70回はこの棄却域に入る。

よって、このサイコロは1の目が出る確率が1／6ではないと判断してよい。

＜感想＞

今回このレポートを作ったきっかけは、問題3の「検定による確率の推定」であった。

ところが、私はこれまで統計学を避けてきたので、文献を調べてもなかなか理解できずとても苦労した。

そんな時、学校の教材室を整理していると、棚の奥から求めていた文献が偶然に見つかったのである。

それは私が高校時代に持っていた数研出版の「確率・統計」の教科書だった。

自分が大数の法則も知らず生徒にサイコロ実験をさせたこと、数学が好きでありながら苦手分野を避けてきたことを、今深く反省しているところである。

１０年研を迎えた今、教師という立場に漫然とせず、常に学ぶ者の気持ちでこれからも数学の世界を旅していきたい。

＜参考文献＞

改訂版　高等学校　確率・統計　　（数研出版・昭和63年発行）

統計学がわかる　　（技術評論社）

2013．8．3

（第86回数学教育実践研究会にて発表）