

2023 年 2 月 8 日 (水)

15:00～ 第一演習室

## 修士論文発表

### 「 $AN_2$ の extreme norm の modified von Neumann- Jordan 定数」

北海道教育大学大学院教育学研究科 (旭川校)

教科教育専攻 数学教育専修

氏名 岡崎知之

担当教官 小室直人

#### 1. 諸定義および諸定理

- (1) von Neumann- Jordan 定数 (以降、NJ 定数), および modified von Neumann- Jordan 定数 (以降、mod.NJ 定数) の定義

Banach 空間  $X = (X, \|\cdot\|)$  に対し

$$C_{NJ}(X, \|\cdot\|) = \sup \left\{ \frac{\|x+y\|^2 + \|x-y\|^2}{2(\|x\|^2 + \|y\|^2)} : \|x\| + \|y\| \neq 0 \right\} \text{ を } X \text{ の von Neumann- Jordan 定数といい,}$$

( $X$  の単位球面を  $S_X := \{x \mid \|x\| = 1\}$  とするとき)

$$C'_{NJ}(X, \|\cdot\|) = \sup \left\{ \frac{\|x+y\|^2 + \|x-y\|^2}{4} : x, y \in S_X \right\} \text{ を } X \text{ の modified von Neumann- Jordan 定数という.}$$

- (3)  $AN_2$  の extreme norm

(i)  $\mathbb{R}^2$  の任意の点  $(x_1, x_2)$  に対して等式

$$\|(x_1, x_2)\| = \|(|x_1|, |x_2|)\| \quad , \quad \|(1, 0)\| = \|(0, 1)\| = 1$$

が成り立つような  $\mathbb{R}^2$  上のノルム  $\|\cdot\|$  を absolute normalized ノルムといい,  $\mathbb{R}^2$  上の absolute normalized ノルム全体のなす集合を,  $AN_2$  と表す.  $AN_2$  は  $L^p$ -ノルムなどの主要なノルムを含んでいる.

(ii)  $\|\cdot\| \in AN_2$  が

$$\|\cdot\| = \frac{1}{2} (\|\cdot\|' + \|\cdot\|'') \quad , \quad \|\cdot\|', \|\cdot\|'' \in AN_2 \quad \text{ならば} \quad \|\cdot\|' = \|\cdot\|''$$

を満たすとき,  $\|\cdot\|$  を  $AN_2$  の extreme norm ノルム (以降, 端点ノルム) という.  $AN_2$  は凸構造をもっているので,  $AN_2$  の端点ノルムを考察することには意味がある.

(iii)  $AN_2$  の extreme norm 全体の集合

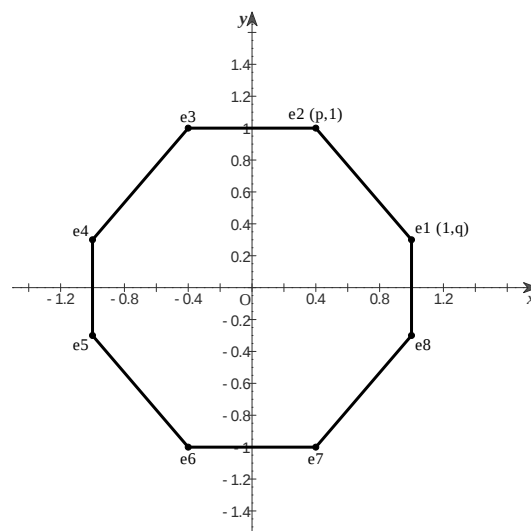
$0 \leq p, q \leq 1$  に対し

$$\|(x_1, x_2)\|_{p,q} := \begin{cases} \frac{|x_1|}{(1-q)|x_1| + (1-p)|x_2|} & (|x_2| \leq q|x_1|) \\ \frac{|x_2|}{(1-p)|x_1| + (1-q)|x_2|} & (|x_2| \geq q|x_1| \text{ かつ } |x_1| \leq p|x_2|) \\ |x_1| & (|x_1| \geq p|x_2| \text{ かつ } |x_2| \leq q|x_1|) \\ |x_2| & (|x_2| \geq q|x_1| \text{ かつ } |x_1| \geq p|x_2|) \end{cases}$$

と定義すると,

$AN_2$  の端点ノルム全体の集合  $E(AN_2)$  に対して,

$E(AN_2) = \{\|\cdot\|_{p,q} \mid 0 \leq p, q \leq 1\}$  が成り立つ.



(3) NJ 定数および mod.NJ 定数の性質

(i)  $1 \leq C'_{NJ}(X, \|\cdot\|) \leq C_{NJ}(X, \|\cdot\|) \leq 2$

(ii) 「 $X$  が Hilbert 空間」  $\Leftrightarrow C_{NJ}(X, \|\cdot\|) = 1$

(iii) 「 $X$  が Hilbert 空間」  $\Leftrightarrow C'_{NJ}(X, \|\cdot\|) = 1$

(iv) ノルム空間  $X = (X, \|\cdot\|)$  の双対空間を  $X^* = (X^*, \|\cdot\|^*)$  とすると

$$C_{NJ}(X^*, \|\cdot\|^*) = C_{NJ}(X, \|\cdot\|)$$

←研究成果(2)と関連

(v)  $C_{NJ}(X, \|\cdot\|) = \sup \left\{ \frac{\|rx+y\|^2 + \|rx-y\|^2}{2(1+r^2)} : x, y \in S_X, 0 \leq r \leq 1 \right\}$

←研究成果(3)と関連

(vi)  $M_1 = \sup_{x \neq 0} \frac{\|x\|}{\|x\|_2}, M_2 = \sup_{x \neq 0} \frac{\|x\|_2}{\|x\|}$  とすると

$$\max\{M_1^2, M_2^2\} \leq C_{NJ}(X, \|\cdot\|) \leq M_1^2 M_2^2$$

←研究成果(4)と関連

2. NJ 定数の計算例 (スライドで説明)

(1)  $\infty$ -ノルム

(2)  $AN_2$  の extreme norm

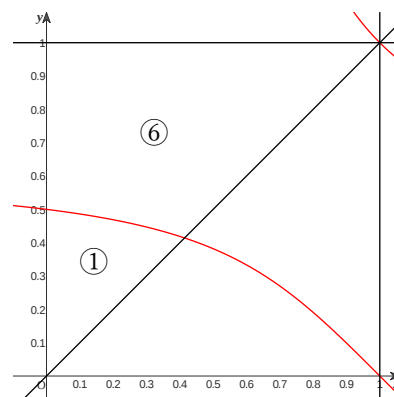
3. 研究成果

\* 本研究では特にこだわらない限り,  $0 \leq p \leq q \leq 1$  としている.

(1)  $AN_2$  の extreme norm の modified von Neumann- Jordan 定数

$0 \leq p \leq q \leq 1$  のとき

$$C'_{NJ}(\mathbb{R}^2, \|\cdot\|_{p,q}) = \max \left\{ 1 + q^2, 1 + \left\{ \frac{(1-p)(1-q)}{1-pq} \right\}^2 \right\}$$



$$= \begin{cases} 1 + q^2 & (p(1 - q^2) + (2q - 1) - pq \geq 0) \quad \dots \textcircled{1} \\ 1 + \left\{ \frac{(1-p)(1-q)}{1-pq} \right\}^2 & (p(1 - q^2) + (2q - 1) - pq \leq 0) \quad \dots \textcircled{6} \end{cases}$$

\* この式を求める際に,

ノルム空間  $X = (X, \|\cdot\|)$  に対し

$$P(x, y) := \frac{\|x+y\|^2 + \|x-y\|^2}{2(\|x\|^2 + \|y\|^2)} \quad (x, y \in X, \|x\| + \|y\| > 0) \text{ を定義し,}$$

$x, y$  が  $\|\cdot\|_{p,q}$  の端点のうちいずれかと等しくなる場合について調べた.  
その結果を挙げる.

$$P(e_1, e_2) = \begin{cases} 1 + \left\{ \frac{(1-p)(1-q)}{1-pq} \right\}^2 & (2q - 1 \leq pq) \quad \dots \textcircled{1} \\ 1 + \left( \frac{1-p}{2} \right)^2 & (pq \leq 2q - 1) \quad \dots \textcircled{2} \end{cases}$$

$$P(e_1, e_3) = \begin{cases} \frac{(1-p)^2 + (1-q)^2}{(1-pq)^2} & (pq \leq 1 - 2q) \quad \dots \textcircled{3} \\ \left( \frac{1-p}{1-pq} \right)^2 + \frac{(1+p)^2}{4} & (1 - 2q \leq pq \leq 1 - 2p) \quad \dots \textcircled{4} \\ \frac{(1+q)^2 + (1+p)^2}{4} & (1 - 2p \leq pq) \quad \dots \textcircled{5} \end{cases}$$

$$P(e_1, e_4) = 1 + q^2 \quad \dots \textcircled{6}$$

$$P(e_1, e_5) = 1 \quad \dots \textcircled{7}$$

$$P(e_2, e_3) = 1 + p^2 \quad \dots \textcircled{8}$$

これらの式の中に  $C_{NJ}(\mathbb{R}^2, \|\cdot\|_{p,q})$  と一致する式が存在するが, どの式が一致するかを調べるために大小関係の評価計算が必要になる. 本研究では以下の手順で評価を行った.

手順1 ⑥, ⑦, ⑧式については  $0 \leq p \leq q \leq 1$  より, ⑥式が最大であることは明らか.

手順2 ⑥式と  $P(e_1, e_2)$ , ⑥式と  $P(e_1, e_3)$  をそれぞれ評価した.

手順3 ①, ②式の比較および③, ④, ⑤式の比較は  $(p, q)$  の条件が異なるため, 評価の必要はないので,  $P(e_1, e_2)$ ,  $P(e_1, e_3)$  の  $(p, q)$  条件式をグラフに表した領域が重なる式のみ評価した.

評価計算の具体的な例として, 評価計算が最も多くなった④式と⑥式の評価計算を挙げる.

まず, 2式の差をとるため

$$f(p, q) = (1 + q^2) - \left\{ \left( \frac{1-p}{1-pq} \right)^2 + \frac{(1+p)^2}{4} \right\} = \frac{1}{4} \left( \frac{1}{1-pq} \right)^2 [4(1 + q^2) - (1 + p)^2](1 - pq)^2 - 4(1 - p)^2]$$

とした.

コンピュータシミュレーションにより,  $f(p, q)$  が正であることと評価計算につながるような因数分解が見つからないことが予想されたので, 偏微分を用いて  $f(p, q)$  が正であることを示した.

具体的には、以下の 3 点を示した.

[A]  $1 - 2q = pq$

を満たす  $(p, q)$  について  $f(p, q) \geq 0$

[B]  $1 - 2q = pq, q = 1, pq = 1 - 2p$

を満たす  $(p, q)$  について  $\frac{\partial}{\partial q} f(p, q) > 0$

[C]  $1 - 2q \leq pq \leq 1 - 2p, 0 < p \leq q < 1$

を満たす  $(p, q)$  について  $\frac{\partial}{\partial q} f(p, q) > 0$

特に [B] の計算では

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial q} f(p, q) &= \{4(1 + q^2) - (1 + p)^2\}'(1 - pq)^2 + \{4(1 + q^2) - (1 + p)^2\}\{(1 - pq)^2\}' \\ &= 2(1 - pq)\{-8pq^2 + 4q + (p^3 + 2p^2 - 3p)\} \end{aligned}$$

ここで,  $f_2(p, q) = -8pq^2 + 4q + (p^3 + 2p^2 - 3p)$  とし, この符号を調べた.

$(p, q)$  の条件式が 3 つあるので, それぞれの条件式に合わせて場合分けをする.

例として「 $1 - 2q = pq$  ( $0 \leq p \leq \sqrt{2} - 1$ ) の場合」を挙げる.

$$f_2(p, q) = \left(\frac{1}{p+2}\right)^2 (p^5 + 6p^4 + 9p^3 - 4p^2 - 16p + 8)$$

$$f_3(p) = p^5 + 6p^4 + 9p^3 - 4p^2 - 16p + 8 \text{ とすると}$$

$$f'_3(p) = (p + 1)(5p^3 + 19p^2 + 8p - 16)$$

$$f_4(p) = 5p^3 + 19p^2 + 8p - 16 \text{ とすると}$$

$$f'_4(p) = 15p^2 + 19p + 8 > 0$$

よって,  $f_4(p)$  は単調増加関数であり,  $f_4(\sqrt{2} - 1) = -2 - 5\sqrt{2} < 0$  であるから,  $f_4(p) < 0$ .

したがって,  $f'_3(p) < 0$

よって,  $f_3(p)$  は単調減少関数であり,  $f_3(\sqrt{2} - 1) = 10 - 6\sqrt{2} > 0$  であるから,  $f_3(p) > 0$

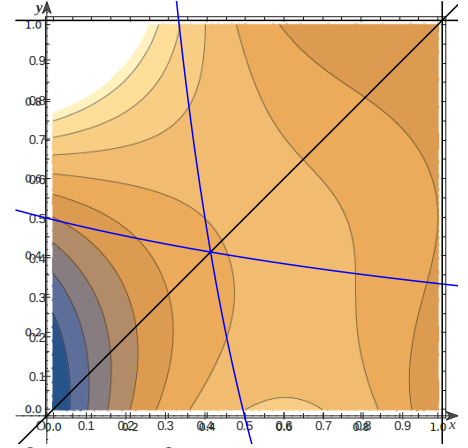
以上より,  $f_2(p, q) > 0$

(2)  $C'_{NJ}(\mathbb{R}^2, \|\cdot\|_{p,q}) = C_{NJ}(\mathbb{R}^2, \|\cdot\|_{p,q})$  となる  $(p, q)$  の条件

先行研究

式場翔太, 「2 次元 Banach 空間の von Neumann-Jordan 定数と James 定数との関係についての考察」, 平成 28 年度学位論文 (修士) (2016)

において, 双対空間を用いて



(i)  $s^2 + t^2 \leq 1$  ならば

$$C_{NJ}(\mathbb{R}^2, \|\cdot\|_{\psi_{s,t}}) = \left(\frac{1-s}{t}\right)^2 + 1$$

(ii)  $\frac{1}{\sqrt{2}} < s < 1$  ならば

$$C_{NJ}(\mathbb{R}^2, \|\cdot\|_{\psi_{s,s}}) = 2\{(1-s)^2 + s^2\}$$

が示されている．これらを  $C_{NJ}(\mathbb{R}^2, \|\cdot\|_{p,q})$  を適用すると

(i)  $(1-p)^2 + (1-q)^2 \leq (1-pq)^2$  ならば  $C_{NJ}(\mathbb{R}^2, \|\cdot\|_{p,q}) = q^2 + 1$

(ii)  $0 < p = q < \sqrt{2} - 1$  ならば  $C_{NJ}(\mathbb{R}^2, \|\cdot\|_{p,q}) = 1 + \left\{\frac{(1-p)(1-q)}{1-pq}\right\}^2$

「3. 研究成果(1)」から,

$(1-p)^2 + (1-q)^2 \leq (1-pq)^2$  または  $0 < p = q < \sqrt{2} - 1$  ならば,  
 $C'_{NJ}(\mathbb{R}^2, \|\cdot\|_{p,q}) = C_{NJ}(\mathbb{R}^2, \|\cdot\|_{p,q})$  を示した.

(3)  $C'_{NJ}(\mathbb{R}^2, \|\cdot\|_{p,q}) \neq C_{NJ}(\mathbb{R}^2, \|\cdot\|_{p,q})$  となる  $(p, q)$  の条件

$$P_{xy}(r) = \frac{\|rx+y\|^2 + \|rx-y\|^2}{2(1+r^2)} \quad (x, y \in S_X, 0 \leq r) \text{ と定義し,}$$

$$P_{xy}(1) < P_{xy}\left(\frac{\sqrt{(1+p^2)(1+q^2)} - (p-q)}{1+pq}\right) \text{ を示し,}$$

$p(1-q^2) + (2q-1) - pq \leq 0$  ,  $0 \leq p < q$  ならば,  
 $C'_{NJ}(\mathbb{R}^2, \|\cdot\|_{p,q}) \neq C_{NJ}(\mathbb{R}^2, \|\cdot\|_{p,q})$  を示した.

(4)  $\max\{M_1^2, M_2^2\} \leq C'_{NJ}(\mathbb{R}^2, \|\cdot\|_{p,q})$  の成立

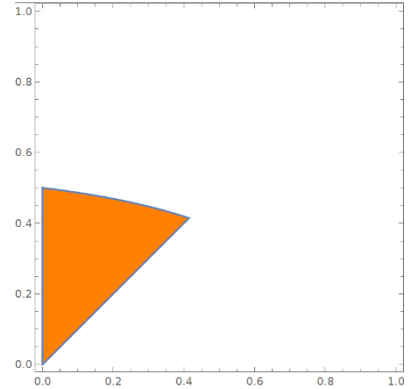
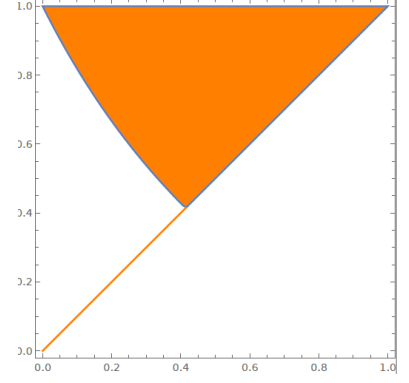
「1. 諸定理および諸定義 (3)(iv)」は,  $C_{NJ}(\mathbb{R}^2, \|\cdot\|_{p,q})$  では成り立つことが知られているが,  
 $C'_{NJ}(\mathbb{R}^2, \|\cdot\|_{p,q})$  で成り立つかどうかは, 一般には知られていない.

そこで, ノルム空間  $X = (\mathbb{R}^2, \|\cdot\|_{p,q})$  について,

$$M_1^2 = \left(\frac{\sqrt{1+q^2}}{1}\right)^2 = 1 + q^2 \quad , \quad M_2^2 = \frac{(1-p)^2 + (1-q)^2}{(1-pq)^2}$$

を求め, 大小関係を確認した.  $M_1^2, M_2^2$  はそれぞれ「3. 研究成果 (1)」を示す際の⑥式, ③式と一致しているので, ①～⑧式の大小関係から以下の定理が容易に示された.

$AN_2$  の端点ノルムにおいては,  $\max\{M_1^2, M_2^2\} \leq C'_{NJ}(\mathbb{R}^2, \|\cdot\|_{p,q})$  が成り立つ.



#### 4. 今後の課題

(1)  $C'_{NJ}(\mathbb{R}^2, \|\cdot\|_{p,q}) = C_{NJ}(\mathbb{R}^2, \|\cdot\|_{p,q})$  が成立する  $(p, q)$  の必要十分条件

本研究で、 $C'_{NJ}(\mathbb{R}^2, \|\cdot\|_{p,q}) = C_{NJ}(\mathbb{R}^2, \|\cdot\|_{p,q})$  となる  $(p, q)$  の一部の値の組は確認できたが、全てではない。全ての値の組が分かれば当然  $C'_{NJ}(\mathbb{R}^2, \|\cdot\|_{p,q}) = C_{NJ}(\mathbb{R}^2, \|\cdot\|_{p,q})$  となる全ての  $(p, q)$  の値の組も明らかになる。

(2)  $C_{NJ}(\mathbb{R}^2, \|\cdot\|_{p,q})$  の値

本研究で  $C'_{NJ}(\mathbb{R}^2, \|\cdot\|_{p,q}) \neq C_{NJ}(\mathbb{R}^2, \|\cdot\|_{p,q})$  となる例を示したが、 $C_{NJ}(\mathbb{R}^2, \|\cdot\|_{p,q})$  の値を決定できてはいない。 $C_{NJ}(\mathbb{R}^2, \|\cdot\|_{p,q})$  そのものの値を求めることが今後の課題である。

#### 5. 数学教育との関連

大学院で研究をおこなった経験は「課題研究」の指導に活かせると考えている。現行の学習指導要領では「課題研究」への取り組みが義務付けられているが、高等学校の数学科教員には「課題研究」を苦手とする教員が多く見られる。その原因はいくつか挙げられるが、代表的なのは教員自身が数学をテーマとした課題研究を行った経験がないことが原因ではないだろうか。大学数学科では4年生でセミナーに参加し、テキストの輪読を行うのが一般的である。課題研究の手順である「課題を発見する、解決する、新たな課題を発見する」というサイクルを経験する機会が少ないのかもしれない。

また高校教員は指導の際に、大学数学や数学者たちの話をすることがあるが、教員自らの学生経験や想像で補っている部分が多いのではなかろうか。可能であれば、高校数学の基盤となっている大学数学を論拠をもって指導したいところである。

3年間、大学院生として専門分野のごく一部ではあるが研究を行った経験は、高校教員が抱えるこれらの問題を必ず解決してくれると考えている。また久しぶりに生徒の立場で講義や課題に取り組み、「分からない」気持ちを感じられたのも大きな成果だと思う。

#### 6. 学びを終えて

数学好きにとって、誰も発見していない定理を発見することは、一生の夢ではないだろうか。私は大学数学科を卒業後、塾講師を経て高校教員になったが、この夢を捨てきれなかった。北教大旭川校の先生方のご理解をいただき、47歳にして初の専門分野の研究をさせていただいたが、高校数学に慣れてしまったせいか、厳密な論議や大学数学の知識になかなかついていけなかった。そんなとき、小室先生は「ゆっくりで良いんです。分かるまで考えましょう。」とお声をかけていただいた。この言葉は強く印象に残っており、今後の教員生活で生徒に伝えたい。

研究活動を通して、私の研究に対するいくつかの固定概念を変えることができた。主に3点挙げる。

1点目は「数学には未解決の問題が多数ある」ということである。本研究の  $\text{mod.NJ}$  定数もその1つであり、一見平面幾何の簡潔な問題と捉えてしまうが、実際に挑戦すると計算が複雑でなかなか結論に辿り着かない。また、私が抱えている問題の中にも数学界で未解決の問題があり、問題が未解決かどうかを調べることが研究の第一歩であることを学んだ。

2点目は「専門分野の情報は、専門分野の世界に属することにより得られる」ということである。私は数学は紙と鉛筆があれば、あとは自分の思考次第で研究ができると思い込んでいたが、数学界は常に変化しており、最新の状況を知るためには論文検索だけでなく、同じ研究を行う研究者との繋がりが必要であることを学んだ。

3点目は「昔に比べてコンピュータシミュレーションが活用できる」ということである。現在のコンピュータの性能は計算速度・機能・AIの面で格段に進歩している。また、フリーソフトや低価格のアプリでも十分利用できるものが多い。NJ定数の計算では大小関係の評価計算を何度も行うが、予想が誤っていた場合、膨大な計算がすべて無駄になってしまう可能性がある。本研究では、評価を行う前に「GRAPES」「Wolfram Alpha」「Mathematica」を用いて、3次元グラフによるシミュレーションを行い、予想を立てた。コンピュータが発展していない時代と比べて、現代数学は研究スピードが格段に速くなり、より深い研究が行えていることを学んだ。

## 7. 謝辞

最後に、講義に関わっていただいた先生方、唯一の大学院の同級生である奥村翔先生、科学館イベントに協力してくれた学生の方々、研究活動を温かく見守ってくださった旭川南高校および旭川北高校の先生方、愛する家族、そして、最後まで根気強くご教授いただいた担当教官の小室直人先生と皆さんに感謝と敬意を表します。