中学数学と高校数学の意外な共通部分

旭川南高校
岡崎　知之

0　はじめに

私は普段、授業で中学数学の既習事項を説明する際に、「中学校で習ったと思うんだけど、聞いたことがない人はいますか？」という確認をしている。ところがよく考えてみると、私は最近中学校の教科書を確認したことがない。最後に確認したのは、10 年近く前になるかもしれない。

今年度から北教大旭川校に院生として通っているが、授業改善に絡む講義が複数あり、久しぶりに中学校の教科書をじっくり読み通し、中学数学の学習範囲の認識をアップデートすることができた。すると、生徒が初めて見たような表情をする知識も、実は既習事項が多く含まれていることが分かった。

このレポートでは、個人的な感覚ではあるが、「（生徒が）知らないと思っていたのに、実は知っていた」数学知識を挙げ、皆さんの認識のアップデートに貢献したい。

1　共通部分の紹介

以下に、私が予想していなかった中学数学での既習事項を挙げる。

１．絶対値（**必修**）

（知識）
「数直線上で、ある数に対応する点の原点からの距離を、その数の絶対値という。」
（問題）
・次の数の絶対値をいいなさい。
(1)　$+7$　(2)　$-\frac{1}{3}$
・絶対値が 10 である数をいいなさい。

（コメント）
定義は既習で、記号は未習である。しかし中学数学では２点間の距離は扱わないので、絶対値の利用価値は低く、生徒の習熟度も低くなる傾向があると予測できる。

２．演算が閉じているか（**必修**）

（問題）
下の表に計算がいつでもできるときは○、いつでもできるとは限らないときは×を書き入れなさい。

	加法	減法	乗法	除法
自然数				
整数				
分数の形に表せる数				

（コメント）
高校でも最近はあまりこの事項を丁寧に扱わなくなった。「有理数」「無理数」という言葉を使っていないだけで、高校の問題とほぼ変わらない。ちなみに、「自然数」「整数」「有理数」の集合の包含関係も図示されている。

３．仮平均（**必修**）

（知識）
基準との差を使って次のような式を考えます…（中略）…この式を計算すると、個数の平均を求めることができます。
（問題）
下の表は学校で集めているペットボトルのキャップの集計表です。キャップの個数の基準を 100 個として、平均を求めましょう。

	第１週	**第２週**	**第３週**	**第４週**
キャップの個数	119	111	92	108

（コメント）
　統計分野はの年々重要視されている単元のため、「仮平均」の習熟度は高く、復習もあまり必要のない知識であると私は感じている。

４．文字式の割り算（**必修**）

（問題）
$(8x-6) \div 2 = \frac{8x-6}{2} = 4x - 6$
上の計算には間違いがあります。どこが間違っているかを説明し、正しく計算しなさい。
（コメント）
　高校でもよく見かける計算ミスであり、間違いの理由に気付かない生徒も少なくない。しかし、教科書ではこのように詳細に紹介されており、気付くかどうかは生徒の個々の習熟度が原因と考えられる。

５．文字を扱う不等式（**必修**）

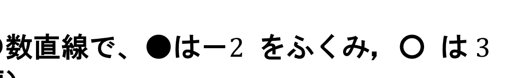
（知識）
xの値が 10 より大きいことを、$x > 10$と表す。$x > 10$または$x = 10$のとき、xの値を 10 以上といい、記号≧を使って、$x \geqq 10$と表す。
（問題）
次の数量の関係を不等式で表しなさい。
「10g の封筒に、１枚 3g の便せんをx枚入れるとき、全体の重さは 50g よりも軽い。」
（コメント）
　不等式に関しては記号の扱いしか習っていないと思い込んでいたが、「解法」を除き、式の表記には慣れている。また後述するが、不等式で表記した集合を数直線で表す単元も存在する。

６．不等式の解法（**発展**）

（知識）
等式と同じように、不等式には次のような性質があります。
Ａ＞Ｂ　ならば　Ａ＋Ｃ＞Ｂ＋Ｃ　…（中略）　…
しかし、不等式の両辺に同じ負の数をかけたり、割ったりすると不等号の向きが変わります。
（問題）
次の不等式を解きましょう。
$21x - 3 < 6$
（コメント）
　方程式を学習しているので、不等式の解法もさほどハードルは高くないと思われる。高校でも進学校は既習事項として取り扱うことができるのではないだろうか。また、ここまで習っているなら解法も必修にしたほうが、不等式の有用性を感じてもらえるのではないかと思うのは、私だけだろうか。

７．変域（**必修**）

（知識）
変数x の変域がー2 以上 3 未満のとき，ー2≦x＜3 と表す。



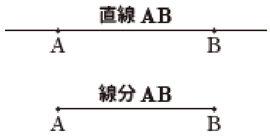
上の数直線で、●はー2 をふくみ，○ は 3 をふくまないことを表している。
（問題）
変数xがー3 以上 5 未満の範囲の値をとるとき，xの変域を，不等号を使って表しなさい。
また，数直線上に表しなさい。

（コメント）
　不等式で表記した集合を数直線で表す、またはその逆を行うことは、（中位層が多い）本校でも苦手意識を持つ生徒が多い。中高接続を考えると、高い習熟を期待したい知識ではあるのだが…

8．直線と線分（**必修**）

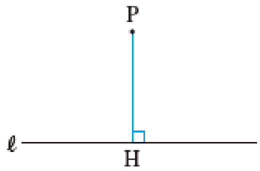
（知識）

2 点 A，B を通る直線を 直線 AB という。
直線 AB の一部分で，点 A から点 B までの部分を 線分 AB という。



（コメント）
このように細かな分類を中学校でしていただけるのはありがたいが、実際にこれらの単語を扱う場面が少ないため、確認は必要と思われる。

9．点と直線の距離（**必修**）

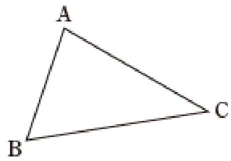


（知識）

線分 PH は，点 P と直線 ℓ 上の点を結ぶ線分のうち，長さが最も短いものである。この線分 PH の長さを 点 P と直線 ℓ との距離 という。

（問題）

右の図の三角形 ABC で，頂点 A と辺 BC との距離をはかりなさい。
また，頂点 B と辺 AC との距離をはかりなさい。

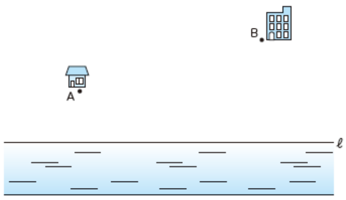


（コメント）
（最短距離）＝（距離）の概念は、既習事項である。
しかし「線分」と同様に、説明以降の活用場面がないので、注意が必要。

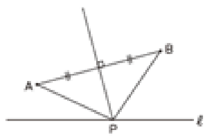
10．距離の和の最小値（**発展**）

（問題）

A 地点を出発し，川の水を採取して B 地点にある建物に向かうことになりました。川の水を川辺のどこで採取してもよいとき，B 地点までを最短の経路で行くには，川辺 ℓ のどの地点で水を採取すればよいかを考えてみましょう。



（コメント）
大学受験問題でも時折見かける問題であるが、習熟度の高い生徒なら既習事項なので当然と感じているのかもしれない。



11．三角形の五心（**発展**）

（知識）

・三角形の 3 つの頂点を通る円を，△ABC の外接円といいます。
また，外接円の中心 O を，△ABC の外心といいます。
・三角形の 3 つの辺に接する円を，△ABC の内接円といいます。
また，内接円の中心 I を，△ABC の内心といいます。

（コメント）
扱う問題が少ないので印象は薄いと思われるが、「聞いたことある」と感じる生徒もいるかもしれない。

12．オイラー数（**発展**）

（問題）

・正多面体の面，辺，頂点の数を調べて，右の表をうめてみましょう。
・正多面体の面の数，頂点の数，辺の数について，どんな関係があるといえるでしょうか。

	面の形	面の数	頂点の数	辺の数
正四面体				
正六面体				
正八面体				
正十二面体				
正二十面体				

（コメント）
アクティブラーニングでよく扱われる問題であるが、中学校によっては既に経験している生徒もいるのかもしれない。

13．範囲**（必修）**

（知識）

（範囲）＝（最大値）－（最小値）

（コメント）

代表値同様、この言葉も既習事項。しかし単純すぎるが故、忘却も早いかも…

14．有効数字**（必修）**

（知識）

・真の値に近い値のことを 近似値という。

・ある県の人口は約 38 万人であるとき，この近似値を 380000 と表すと，どこまでが有効数字であるかわからない。そこで，有効数字の桁数に着目して，有効数字が

3，8 **の** 2 **桁のときには，** 3.8×10^5

3，8，0 **の** 3 **桁のときには，** 3.80×10^5 **のように，整数部分が** 1 **桁の数と** 10 **の累乗の積の形で表す。**

また，近似値 0.057 **の有効数字が** 5，7 **の** 2 **桁のときは，**$5.7\times\frac{1}{10^2}$**と表す。**

（コメント）

高校数学では扱わないが、高校理科では必修事項である。今の高校生にとっては、初見ではないことが分かる。

15．単項式・多項式・次数**（必修）**

（知識）

・$25x$**や**ab **のように，項が１つだけの式を 単項式という。**

・$6a-b+5$ **のように，項が** 2 **つ以上ある式を 多項式という。**

・多項式で，数だけの項を定数項という。

・多項式では，次数の最も大きい項の次数を、その多項式の次数という。

（コメント）

数学Ⅰのスタートでおなじみのこれらの単語はすべて既習事項。ただし、「着目」については未習事項。

16．３元１次連立方程式**（発展）**

（問題）

次の連立方程式を解け。

$$\begin{cases} x+2y+z=430 & \cdots\cdots ① \\ 2x+3y+z=680 & \cdots\cdots ② \\ 3x+y+2z=710 & \cdots\cdots ③ \end{cases}$$

（コメント）

「発展問題」では、上の問題の解法が丁寧に紹介されている。

習熟度が高い生徒は経験しているかもしれない。

17．１次関数 $ax+by+c=0$**（必修）**

（問題）

次の方程式のグラフをかきなさい。

$4x-3y-8=0$

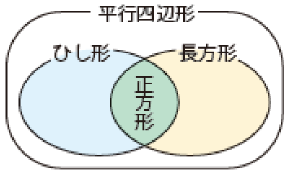
（コメント）

数Ⅱで登場する「＝０」の形も既習済み。違和感なく理解できるはずなのだが…

18．図形の集合**（必修）**

（知識）

ひし形，長方形，正方形は，特別な平行四辺形とみることができる。
したがって，ひし形，長方形，正方形は，平行四辺形の性質をもっている。
また，正方形は，ひし形と長方形の両方の性質をもっている。

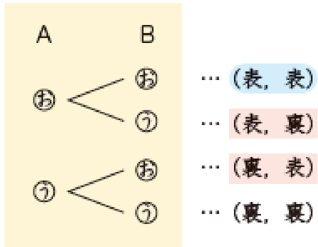


（コメント）
高校数学では「必要・十分条件」で問われる場面があるが、実は既習済み。
「ひっかかった〜。」「ずるい。納得できない。」と言っている生徒を見かけるが、
出版社によって掲載しない教科書もあるのだろうか。

19．区別する・しない**（必修）**

（知識）

1 枚の硬貨を投げるとき，硬貨には表と裏の 2 通りの出方がある。
2 枚の硬貨を同時に投げたときの表と裏の出方は，2 枚の硬貨をそれぞれ A，B として区別して考える。
2 枚の硬貨の表と裏の出方を図にかいて整理すると、右のようになる。



※表をお，裏をうで示している。

（コメント）
高校受験でも必須の知識と思われるが、意外に生徒の誤答が多い。
重要な概念なので、中学校での指導に期待したい。

20．余事象の確率**（必修）**

（知識）

一般に，あることがら A について，次の関係が成り立つ。
（A の起こる確率）＋（A の起こらない確率）＝1
したがって，次の関係が成り立つ。
（A の起こらない確率）＝1－（A の起こる確率）

（問題）

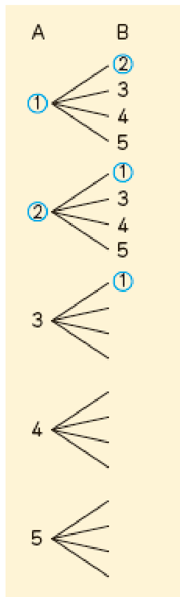
2 個のさいころを同時に投げるとき，次の確率をそれぞれ求めなさい。
(1) **異なる数の目が出る確率**
(2) **少なくとも 1 個は奇数の目が出る確率**

（コメント）
「余事象」という言葉は使っていないが、公式は与えられている。しかも「少なくとも」という単語を含む問題も扱っている。高校で再度確認する必要はあるのだろうか。

21．条件付き確率**（発展）**

（問題）

5 本のうち，当たりが 2 本入っているくじがあります。このくじを，A，B の 2 人がこの順に 1 本ずつ引きます。引いたくじはもとに戻しもどさないものとします。先に引く A とあとに引く B とでは，どちらが当たりやすいでしょうか。

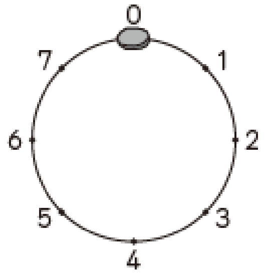


（コメント）
中学数学ではこの問題を、右図のように樹形図を用いて解いている。
高校の同単元の冒頭で、「引いた順で確率は変化するか」という問いかけをすることがあるが、生徒の中には「そんなの知ってるよ。」と思っている生徒もるのかもしれない。

22．ランダムウォーク（発展）

（問題）

右の図のように，1 周が 8cm の円周を 8 等分した点に 0 から 7 までの番号をつけます。1 個のさいころを投げたときの出た目 a によって，次のように石を動かすことにします。



- a が偶数のとき，円周上を右まわりに a cm 動かす。
- a が奇数のとき，円周上を左まわりに a cm 動かす。

最初に石を 0 の位置に置いて，さいころを続けて 2 回投げるとき，石が 4 の位置にある確率を求めなさい。

（コメント）
何と、高校数学でも応用問題に含まれる「ランダムウォーク」を演習問題に採用。中学数学、恐るべし…

23．期待値（発展）

（問題）

A 商店街と B 商店街が，下の表のように賞金がもらえるくじを 500 本つくりました。どちらの商店街のくじを引くほうが，賞金を多くもらえると期待できるでしょうか。

A商店街のくじ

賞金	1000円	500円	100円	合計
本数	10本	90本	400本	500本

B商店街のくじ

賞金	3000円	1000円	100円	合計
本数	5本	25本	470本	500本

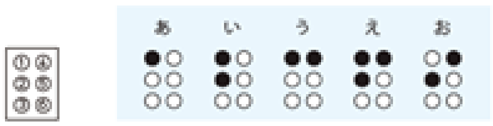
A 商店街がつくったくじの賞金の総額は，
$1000\times10+500\times90+100\times400$ **（円）**
したがって，くじ 1 本あたりの平均の賞金額は，
$\frac{1000\times10+500\times90+100\times400}{500}$ ＝ 190**（円）と計算することができます。**
このような，くじ 1 本あたりの平均の賞金額を，くじ引きの賞金の期待値といいます。

（コメント）
数学Ａから消えてしまった「期待値」。しかし、中学数学では公式までしっかりと紹介されている。
高校数学の穴を埋めているということなのだろうか。新学習指導要領で復活する「期待値」に期待。（笑）

24．点字（発展）

（問題）

点字のしくみについて調べてみましょう。点字は，縦 3 点が 2 列に並んだ 1 ますの 6 つの点に，突起があるかないかで，1 つの文字がつくられています。
（●は突起があることを，○は突起がないことを表しています。）
6 つの点で，何通りの文字が表現できるでしょうか。



（●は突起があることを，○は突起がないことを表しています。）

（コメント）
高校数学でも「数学活用」や「課題研究」で扱われる点字。意外と扱っている中学校も多いのかもしれない。事前にリサーチが必要。この他にも「ピックの定理」が挙げられている。

25．連続する自然数の和**（発展）**

（問題）
(1) 1 **から** n **までの自然数の和は，どんな式になるでしょうか。**
(2) (1) **でつくった式を使って，** m **から** n **までの自然数の和は，**
12（n＋m）（n－m＋1）
と表すことができることを説明しましょう。

（コメント）
「数列」で扱う公式が発展問題で紹介されている。⑵は高校生でも、標準以下の学力の生徒には難問。

26．最大公約数・最小公倍数の求め方**（発展）**

（問題）
(1) 72 **の約数をすべて求めましょう。**
(2) 60 **と** 72 **の最大公約数と最小公倍数を求めましょう。**
(3) 2 **つの自然数について，それぞれ素因数分解した式をもとにして，それらの最大公約数と最小公倍数を簡単に求める方法があります。どんな方法でしょうか。**

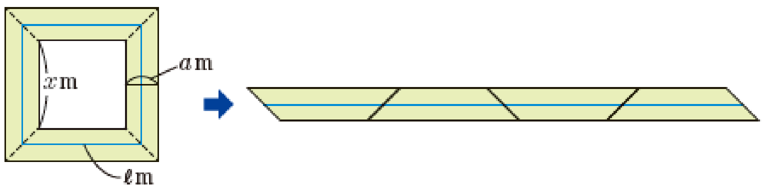
6=2×3
10=2　×5

60=2×2　×3　×5
72=2×2×2×3×3

（コメント）
過去は必修事項であったが、今では発展問題。しかし教えている中学校は多いらしく、２数の同時素因数分解の筆算を見せると、生徒の多くは「知ってる。」という反応がある。なぜ、必修事項に戻さないのだろうか。

27．パップス・ギュルダンの定理**（発展）**

（知識）
下の図のように，道を 4 **つに分割して並べかえました。この図を使って，** S **を** a， **を使った式で表してみましょう。…**S，a，ℓ **には，** S＝aℓ **という関係があることがわかります。**



（コメント）
発展問題とはいえ、何と高校の教科書でもなかなか掲載しない「パップス・ギュルダンの定理」を掲載。しかも、ほとんどの出版社の教科書で扱っているそう。高校数学でも継続して扱ったほうが良いのだろうか。

28．循環小数の分数化**（発展）**

（問題）
・次の循環小数ををつけて表しましょう。
⑴　0.162162162162……　⑵　0.3131313131……
・循環小数$0.\dot{3}\dot{1}$**を分数に直しましょう。**

（コメント）
発展とはいえ、さほど難しくない知識なので、扱っている中学校も多いかもしれない。

29．分母が２項の有理化**（発展）**

（問題）
次の数の分母を有理化しましょう。
⑴　$\frac{1}{\sqrt{3}+\sqrt{2}}$　⑵　$\frac{1}{\sqrt{5}-1}$

（コメント）
こちらもさほど難しくないので、初見でない生徒もいるのかもしれない。

30．平方数と素因数分解**（必修）**

（問題）

$\sqrt{12n}$が整数となる n の値のうち，最小のものを求めなさい。

（コメント）

中学校ではどの生徒も取り組む問題らしい。「意味が分からない。」という高校生がいるのは何故？

31．背理法**（発展）**

（問題）

$\sqrt{2}$が無理数であることを証明せよ。

（コメント）

教科書では「$\sqrt{2}=\frac{n}{m}$」というお馴染みの式から始まり、丁寧に説明されている。

「背理法」という単語を聞いたことがあるかどうかくらいは確認すべきなのかもしれない。

32．二等分線定理**（発展）**

（知識）

これまでに調べてきたことから，次のことが成り立つ。

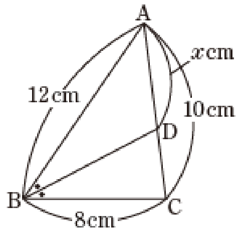
△ABC で，∠A の二等分線と辺 BC の交点を D とすると，

AB：AC＝BD：CD

（問題）

右の図で，線分 BD は∠ABC の二等分線です。

このとき，x の値を求めなさい。



（コメント）

高校でこの問題を扱う際は、比が分かったあとに、肝心な線分の長さを求める場面で躓く生徒が多く見られるが、もし中学校でこの問題に触れていたなら、線分の長さの計算方法も分かるはず。

ということは、あまり扱っていない問題なのだろうか。

33．体積比**（必修）**

（知識）

相似な立体では，相似比が m：n のとき，

表面積の比は　m^2：n^2　　体積の比は　　m^3：n^3　である。

（コメント）

必修の割には、よく理解していない生徒が多い気がする。教科書には演習問題も多数掲載されており、重要視されていると見受けられるが、何故だろう。

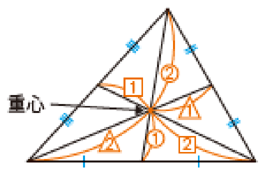
33．重心の性質**（発展）**

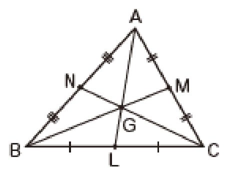
（知識）

三角形の重心の性質三角形の 3 つの中線は重心で交わり，それぞれの中線を 2：1 に分ける。

（問題）

右の図の△ABC で，点 G が重心であるとき，3 つの三角形，△ABG，△BCG，△CAG の面積にはどんな関係があるでしょうか。

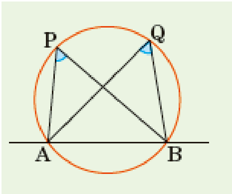




（コメント）

かつての必修事項であったためか、２ページを費やして丁寧に説明・演習が行われている。発展事項だが、無視はできないだろう。必修事項に戻すことを期待したい。

34. 円周角の定理の逆（**必修**）



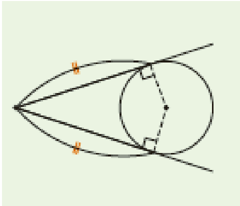
（知識）

2 点 P，Q が直線 AB について同じ側にあるとき，
∠APB＝∠AQB
ならば，4 点 A，B，P，Q は 1 つの円周上にある。

（コメント）

円周角・中心角に並び、その逆も必修事項。
よって高校において、証明等は省略可能。

35. 円の接線の長さ（**必修**）



（知識）

円外の 1 点からその円にひいた 2 つの
接線の長さは等しい。

（コメント）

初めて聞いた表情をする生徒が多い印象があるが、必修事項。
演習問題が１問のみなので、重要視されていないのだろうか。

36. 接弦定理・内接四角形・方べきの定理（**発展**）

（知識）

- **円の接線とその接点を通る弦のつくる角は，その角の内部にある弧に対する円周角に等しい。**
- **円に内接する四角形では，**
  1. **対角の和は 180°である。**
  2. **外角はそれに隣り合う内角の対角に等しい。**
- **円の 2 つの弦 AB，CD が点 P で交わるとき，または，2 つの弦 AB，CD をそれぞれ延長した直線が点 P で交わるとき，**
  PA×PB＝PC×PD である。

（コメント）

円周角・中心角以外の知識については発展事項なので、注意が必要。
それにしても、高校で学ぶ殆どの定理が紹介されているのが凄い。

（おまけ）　＊知ってるようで知らない知識

（知識）

- $a^m \cdot a^n = a^{m+n}$
- $(a^m)^n = a^{mn}$　　**…は知らない**

（コメント）

いわゆる「指数法則」は、昔は必修だったが、現在は掲載されていない。
そのため累乗の計算は、$x^3 = x \times x \times x$ ように１文字単位に分解して計算する。
高校で展開に登場する$(x^2+2)(x^2+x+1)$のような次数の高い式は、難しく感じるのかもしれない。

2　中学と高校の教科書の違い

　中学校の教科書に目を通してみて、全体的にレベルが高く、特に発展問題はかなり高校数学を意識して作られていると感じた。

　また、掲載されている知識や問題以外にも決定的な違いがある。それは、「展開方法」である。高校の教科書は「定理の証明→定理→演習」というような辞典型になっており、理論的には間違いがないが、人間の思考の順にはなっていないような気がする。

　例えば、皆さんが数学的に重要な発見をするとき、どんな過程を辿るだろうか。具体的な複数の例に着目し、その共通する法則を見つけ、単純化・抽象化し、証明するという手順になるのではないだろうか。辞典型ではそれが真逆に掲載されている。

　中学校の教科書では、人間の思考順に合わせた展開になっており、特に導入の部分で用いられる具体例は、興味・関心を高める教材が採用されている。授業者もその方が思考・判断力を高める授業を展開しやすいのではないだろうか。

教育大では、30 年以上前の中学校の教科書を拝見させていただいたが、知識の量・質ともに豊富な反面、現在の高校数学の教科書である辞典型になっていた。高校教科書もいずれは中学のような形式に変わっていくと思われるが、教育改革の完成まで猶予がない。可能な限り早期の変革を期待している。

3　このレポートの活用法

調査を通じて、中学と高校の数学の共通部分が明確化できた。教える事項が、既習事項かつ習熟度が高ければ、ほぼ生徒に演習を任せた方が、主体的な学びの姿勢を育むことができると考える。また既習事項の２重指導を避けることができれば、大幅な時間短縮にもつながり、授業の質の向上にもつながるのではないか。

しかしながら、習ってはいても、絶対値のように中学校で活用場面がない（＝重要視されない）事項は注意が必要である。生徒への確認も慎重に行う必要があるだろう。

（注）「必修」でも、出版社により扱わない問題も存在すると考えられますので、あくまで参考としてください。

4　さいごに

私は最近、教育大の講義で学んだ理論を基に、目下、授業を辞典式から変更しつつあります。資料として授業で使用しているワークシートを添付させていただきました。参考になれば幸いです。

また今回のレポートは、北教大旭川校の相馬一彦先生・谷地元直樹先生・院生の奥村翔先生との研究協議をきっかけにして作成しました。更に資料の出版元の教育出版様には、掲載を快諾していただきました。ご協力いただいた皆様に、感謝の意を表します。ありがとうございました。

5　添付資料

「なくさないでねワークシート　チェバ・メネラウスの定理①」

6　出典

中学数学１年・（同）２年・（同）３年　（教育出版）

（2021 年1月 30 日　第 116 回数学教育実践研究会　にて発表）