「$\mathrm{n}=1$」が成立しないS_nの作り方

旭川南高校
岡崎知之

０．はじめに

公式 $\boxed{a_n = S_n - S_{n-1}\ (n \geq 2)}$ を利用して、一般項を求める際、初項だけが正しい初項（S_1）と一致しない場合がある。そのため、この公式を利用した後は、必ず「$\mathrm{n}=1$」の場合について成立するかを確認することになっている。しかし、そのときいつも頭に浮かぶのが、私の嫌いな言葉「結果オーライ」である。「この事態を避ける方法」はないかと考えるのと同時に、「『初項だけが一致しない奇妙な数列』を作るために、S_nをどう設定すればよいか」を考察してみた。

１．「結果オーライ」を避ける（事前に成否を判断する）方法

公式　$\boxed{a_n = S_n - S_{n-1}\ (n \geq 2)}$　において

仮に公式が「$\mathrm{n}=1$」のとき成立するならば

$a_1 = S_1 - S_0$　が成り立つ「S_0」が存在する。

$a_1 = S_1$より

$a_1 = a_1 - S_0$

よって　$\boxed{S_0 = 0}$　（逆も明らか。）

このことを既知としていれば、次のような解き方もできる。

（例１）$S_n = n^2 - n$　で定義される数列$\{a_n\}$の一般項を求めよ。

n=1 のとき

$S_0 = 1^2 - 1 = 0$ より、与式は n=1 のときも成立するから

自然数 n に対し、

$a_n = S_n - S_{n-1} = (n^2 - n) - \{(n-1)^2 - (n-1)\} = 2(n-1)$

以上より

$a_n = 2(n-1)$

＊一般項を求めた後に、「n=1 でも、たまたま使えた。」という偶然感がないので、気持ち的にスッキリします。

＊ただ、定義式が n=1 を認めていないので、あくまで前述の定理を認めていることが前提です。

２．$a_1 \neq S_1$となるS_nの作り方

(1) どんな数列が一致しないのか？

（例２）$S_n = 2n^2 - 3n + 4$で定義される数列$\{a_n\}$の一般項を求めよ。

（ⅰ）n=1 のとき

$S_0 = 2 \cdot 0^2 - 3 \cdot 0 + 4 = 4$ より、与式は n=1 のとき成立しない。

（ⅱ）n≧２のとき

$a_n = S_n - S_{n-1} = (2n^2 - 3n + 4) - \{2(n-1)^2 - 3(n-1) + 4\} = 4\mathrm{n} - 5$

このとき、実際に$S_1 = a_1$を求めてみると

この式の $S_1 = 4 \cdot 1 - 5 = -1$

与式の $S_1 = 2 \cdot 1^2 - 3 \cdot 1 + 4 = 3$　となり、やはり成立しない。

⇒１・２の（例）で挙げた数列は、ともに「等差数列」。

数列の種類は初項の一致に関係がないことがわかります。

⑵ S_0って何？

　そもそもn=1 での成立を考えた際に、与式では新たに「S_0」が発生している。

この「S_0」の持つ意味は何だろう？「拡張」として考えると、

ｎが自然数の場合　$S_1 = a_1$ なので、$S_0 = a_0$。

作った一般項がｎ＝１のときに成立した場合　$S_1 = 0$ なので、$a_0 = 0$。

すなわち、S_nから導いたa_0が、$a_0 = 0$ であることを意味している。

＊a_0が初項である数列と和のイメージ

（ｉ）一般の場合→

<table>
<tr><td>an</td><td colspan="3">Sn</td></tr>
<tr><td>a0</td><td>S0</td><td rowspan="2">S1</td><td rowspan="3">S2</td></tr>
<tr><td>a1</td><td></td></tr>
<tr><td>a2</td><td></td><td></td></tr>
</table>

（ⅱ）n=1 で成立する場合→

$a_0 = S_0 = 0$ となり、

$S_1 = a_1 - a_0 = a_1$ が成立する

<table>
<tr><td>an</td><td colspan="3">Sn</td></tr>
<tr><td>0</td><td>0</td><td rowspan="2">a1</td><td rowspan="3">S2</td></tr>
<tr><td>a1</td><td></td></tr>
<tr><td>a2</td><td></td><td></td></tr>
</table>

⑶ 作り方

これまでの理論を踏まえて、n=1 のとき成立する問題、成立しない問題を作問してみる。

（ｉ）成立する問題

成立する場合は、答の数列から和S_nの式を導けばよい。

（例１）の問題を作問してみる

$a_n = 2(n-1) \quad \Rightarrow \quad S_n = \sum_{k=1}^{n} 2(k-1) = n^2 - n$　←当然ですよね((+_+))

（ⅱ）成立しない問題

（例２）の問題を作問してみる

① 答の数列(n ≧ 2) を決める。

$a_n = 4\mathrm{n} - 5$

② $a \neq a_1$ に注意し、初項a を決める。

$a_1 = -1$ より　$a = 3$　としてみた。

③ S_nを求める。

$S_n = a + \sum_{k=2}^{n} a_k = a + (\sum_{k=1}^{n} a_k - a_1) = \boxed{(a - a_1) + \sum_{k=1}^{n} a_n}$　…（☆）

$= \{3 - (-1)\} + \sum_{k=1}^{n}(4k-5) = \boxed{4 + (2n^2 - 3n)} = 2n^2 - 3n + 4$

（☆）の式の構造は「正しい和（$\sum_{k=1}^{n} a_n$）」に「ある値($a - a_1$)」を加えています。

$a \neq a_1$より$a - a_1 \neq 0$ なので、

成立しないS_nは

「答となる数列の和に、０以外の数を数を加える」だけで作れます。

（2019 年 11 月 30 日　数学教育実践研究会にて発表）