あるごじゃんけんの勝率　－オリジナルじゃんけんで数楽しよう！

旭川南高等学校　数学研究部「あるご」
３年次…山口滉士郎　中森光
１年次…志賀友哉　阿部郁也　小野瑶介　平澤佑樹

１．研究の動機や目的

顧問の先生から「じゃんけんであいこになる確率を求めよ。」というミッションを受け、「n 人のときのあいこ確率」の式を求めたところ、確率が急激に増加するようすがわかりました。

その研究をきっかけに、科学館での展示のため、数学研究部オリジナル「あるごじゃんけん」を開発しました。

「あるごじゃんけん」には「王様」と「泥棒」という２つの特殊役が存在しますが、

・「『王様』と『泥棒』が同時に場に現れると『泥棒』の勝ちになる」ことから、

プレイする人数が増えるほどその機会が増えるので、

・「人数が少ないうちは『王様』が有利、多くなると『泥棒』が有利になるのではないか」と推測し、その法則を検証するため、研究を始めました。

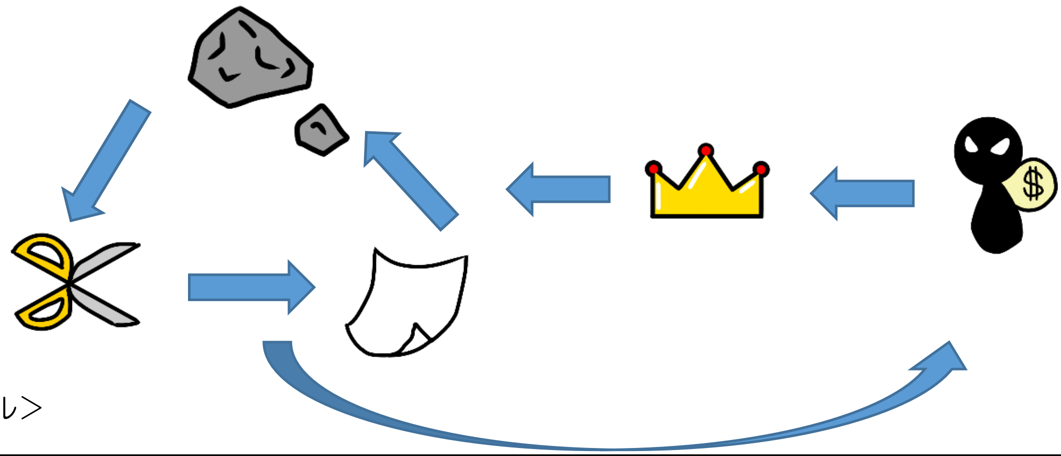
あいこの確率

人数	確率
4	48%
5	63%
6	74%
7	83%
8	88%
9	92%

２．研究の方法や内容

「オリジナルじゃんけん」を考案し、役ごとの勝ちやすさを数学的確率に基づいて計算し、調べる。

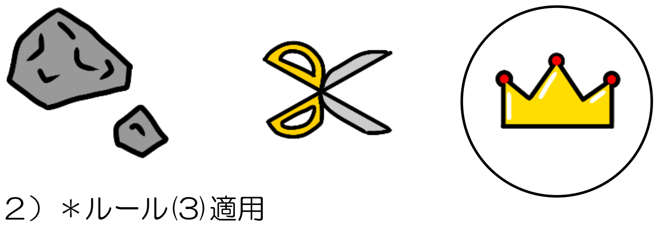
<「あるごじゃんけん」の概念図>



<基本ルール>

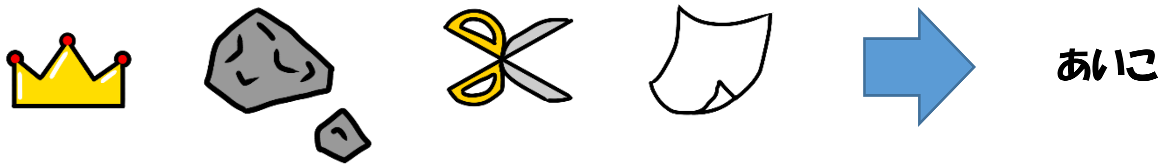
⑴ 場に「王様」「泥棒」のカードが出現していないとき
　⇒通常のじゃんけんと同じ
⑵ 場に「王様」が出現して、「泥棒」が出現していないとき
　⇒「王様」の勝ち
⑶ 場に「泥棒」が出現して、「王様」が出現していないとき
　⇒「泥棒」の負け
⑷ 場に「グー」「チョキ」「パー」がすべて出現しているとき
　⇒あいこ

（例１）＊ルール⑵適用



（例２）＊ルール⑶適用

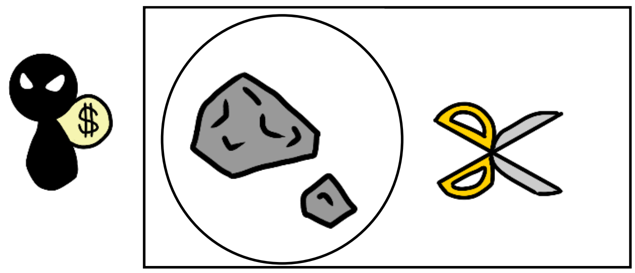
（例３）＊ルール⑷適用



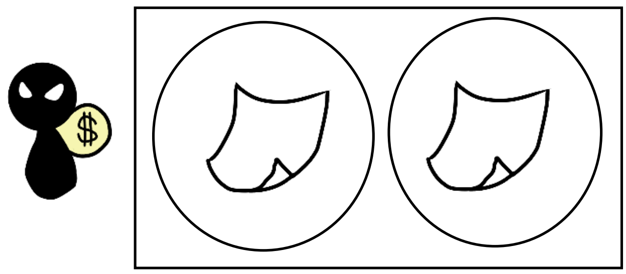
＜特殊ルール＞

⑸ 場に「泥棒」が出現して、「王様」が出現していないときに、 「グー」「チョキ」「パー」のいずれか２種が出現していれば、 「泥棒」以外のカードは、通常のじゃんけんのルールで勝敗を決める。

（例４）＊ルール⑸適用



（例５）＊ルール⑸適用



３．研究の結果と考察

＜仮説＞

⑴ 人数と勝率の関係

王様は「負の相関（単調減少）」　泥棒は「正の相関（単調増加）」をもつ

⑵ ある人数を上回ると、（泥棒の勝率）＞（王様の勝率）が成り立つ

＜検証＞

（表記）

K…王様　T…泥棒　G…グー　C…チョキ　P…パー　O…グーor チョキ or パー

W…勝ち　L…負け　D…あいこ

△△△…「G」「C」「P」の重複順列のうち、
あいことなる順列を除いたもの（18 通り）　（例）GGP　CPC

□□□…GCPの順列すべて（６通り）　（例）CGP　GPC

ﾌﾟﾚｲﾔｰNo

場合の数

1	2	3	P
K	○	○	9
	K	○	6

１５

「KO」＆「OK」の総計

⑴ ２人のとき

KW

1	2	P
K	○	3

3

KL

1	2	P
K	T	1

1

KD

1	2	P
K	K	1

1

TW

1	2	P
T	K	1

1

TL

1	2	P
T	○	3

3

TD

1	2	P
T	T	1

1

GW

1	2	P
G	T	1
	C	1

2

GL

1	2	P
G	K	1
	P	1

2

GD

1	2	P
G	G	1

1

	K	T	○	計
W	3	1	6	10
L	1	3	6	10
D	1	1	3	5

25

	K	T	○	計
W	12%	4%	24%	40%
L	4%	12%	24%	40%
D	4%	4%	12%	20%

100%

⑵ ３人のとき

KW

1	2	3	P
K	〇	〇	9
	K	〇	6

15

KL

1	2	3	P
K	T	T	1
	T	〇	6
	T	K	2

9

KD

1	2	3	P
K	K	K	1

1

	K	T	〇	計
W	15	9	24	48
L	9	15	42	66
D	1	1	9	11

125

	K	T	〇	計
W	12%	7%	19%	38%
L	7%	12%	34%	53%
D	1%	1%	7%	9%

100%

TW

1	2	3	P
T	K	K	1
	K	〇	6
	K	T	2

9

TL

1	2	3	P
T	〇	〇	9
	T	〇	6

15

TD

1	2	3	P
T	T	T	1

1

GW

1	2	3	P
G	C	C	1
	G	C	2
	T	T	1
	T	C	2
	T	G	2

8

GL

1	2	3	P
G	P	P	1
	P	G	2
	K	K	1
	K	〇	6
	K	T	2
	T	P	2

14

GD

1	2	3	P
G	G	G	1
	C	P	2

3

ここで、ある法則があることに気付きました。

１）「王様」の勝ちパターンの「K」を「T」に変えると、「泥棒」の負けパターンになる。

＊「王様」の負けパターンと「泥棒」の勝ちパターン、また、あいこパターンにも同様の関係が成り立つ

２）プレイヤー１のカードを固定したとき、そのパターン数は「$5^{\text{人数}-1}$」通り。

＊３人のとき、プレイヤー１が「王様」を出すパターンは「5^2」通り

1) 「王様」と「泥棒」について

・一方の「勝ち確率」は、もう一方の「負け確率」に等しい。

・「あいこの確率」は等しい。

2) プレイヤー１が「王様」「泥棒」「グーチョキパー」となるパターン数の比は

王様：泥棒：グーチョキパー＝１ ： １ ： ３

この法則から、仮説を検証するためには、「王様」の確率のみを調べればよいことが分かりました。。

またこの法則を利用すれば、「王様」と「グーチョキパー」の各「勝ち」「あいこ」確率を求めれば、すべての確率が計算できます。

⑶　４人のとき

（ⅰ）プレイヤー１が「王様」または「泥棒」を出したとき

・KW（＝TL）
プレイヤー２～４が
ａ）「K」を出さないとき
「GCP」（あいこ）以外で、プレイヤー１の勝利だから　$3^3 - 3! = 27 - 6 = 21$
ｂ）「K」を１人が出すとき
「KOO」（の順列）で、プレイヤー１の勝利だから　$3 \cdot 3^2 = 27$
ｃ）「K」を２人が出すとき
「KKO」（の順列）で、プレイヤー１の勝利だから　$3 \cdot 3 = 9$　計　57

・KD（＝TD）
プレイヤー２～４が
ａ）「KKK」　と　ｂ）「GCP」（の順列）であいこだから　$1 + 6 = 7$　計　７

・KL（＝TW）
全パターンが $5^3 = 125$ なので、　$125 - (57 + 7) = 61$

（ⅱ）プレイヤー１が「グー」を出したとき

・GW
プレイヤー２～４が
ａ）「T」を出さないとき
「Pなし」かつ「GGG」（負け or あいこ）以外で、プレイヤー１の勝利だから　$2^3 - 1 = 7$
ｂ）「T」を１人が出すとき
「Pなし」（負け or あいこ）以外で、プレイヤー１の勝利だから　$3 \cdot 2^2 = 12$
ｃ）「T」を２人が出すとき
「Pなし」（負け）で、プレイヤー１の勝利だから　$3 \cdot 2 = 6$
ｄ）「T」を３人が出すとき　１
計　26

・GD
プレイヤー２～４が
ａ）「K」または「T」を１人が出すとき
「CP」（の順列）であいこだから　$2 \cdot 3! = 12$
ｂ）「K」または「T」を出さないとき
「GGG」または「GCP」（の順列）または「CPのみ」であいこだから　$1 + 6 + 3 \cdot 2 = 13$

計　25

・GL
全パターンが $5^3 = 125$ なので、　$125 - (26 + 25) = 74$

＊４人のときの全パターン

KW

1	2	3	4	P
K	△	△	△	18
	G	G	G	1
	C	C	C	1
	P	P	P	1
	K	○	○	27
	K	K	○	9

57

KL

1	2	3	4	P
K	T	T	T	1
	T	T	○	9
	T	T	K	3
	T	K	K	3
	T	K	○	18
	T	○	○	27

61

KD

1	2	3	4	P
K	K	K	K	1
	G	C	P	6

7

TW

1	2	3	4	P
T	K	K	K	1
	K	K	○	9
	K	K	T	3
	K	○	○	27
	K	○	T	18
	K	T	T	3

61

TL

1	2	3	4	P
T	△	△	△	18
	G	G	G	1
	C	C	C	1
	P	P	P	1
	T	T	○	9
	T	○	○	27

57

TD

1	2	3	4	P
T	G	C	P	6
	T	T	T	1

7

GW

1	2	3	4	P
G	C	C	C	1
	G	C	C	3
	G	G	C	3
	T	T	T	1
	T	T	G	3
	T	T	C	3
	T	G	G	3
	T	G	C	6
	T	C	C	3

26

GL

1	2	3	4	P
G	P	P	P	1
	P	P	G	3
	P	G	G	3
	K	K	K	1
	K	K	○	9
	K	K	T	3
	K	G	G	3
	K	G	C	6
	K	G	P	6
	K	C	C	3
	K	P	P	3
	K	T	○	18
	K	T	T	3
	T	T	P	3
	T	P	P	3
	T	G	P	6

GD

1	2	3	4	P
G	G	G	G	1
	G	C	P	6
	C	C	P	3
	C	P	P	3
	K	C	P	6
	T	C	P	6

25

＜結論＞

これまでのデータをまとめると、以下の表のようになりました。

	KW	TW
2	12%	4%
3	12%	7%
4	9%	10%

４人の勝敗率

	K	T	○	計
W	57	61	78	196
L	61	57	222	340
D	7	7	75	89

625

	K	T	○	計
W	9%	10%	12%	31%
L	10%	9%	36%	54%
D	1%	1%	12%	14%

100%

２～４人の場合については、増加（減少）率が小さいですが、仮説の一部を検証することはできました。

＊補題

＜検証＞の途中で、いくつかの法則を見つけたので、「王様の勝ち」「王様の引き分け」の確率を数式化できれば、より確証に近づくと考え、一般化に挑戦してみました。

＜KW の一般化＞

（ｉ） ★…★（★がｎ個）のパターン数は　$3\cdot 2^n-3$

（例）　３個のとき

GC の重複順列は　2^3

CP の　〃　〃

PG の　〃　〃

この順列の中に

GGG、CCC、PPP が２個ずつ含まれているので

総パターン数は

$3\cdot 2^3-1$

（ⅱ） ★がｋ個のとき、★の配置パターン数は　${}_{n-1}C_k$

KW

1	2	3	4	5…	n
K	K	…	…	…	K	★
	K	…	…	K	★	★
	…					
	K	K	★	…	…	★
	K	★	…	…	…	★
	★	…	…	…	…	★

★…GCPの内、１種または２種で構成される順列

（例）GCCG　CCCC　等

よって、総パターン数は

$${}_{n-1}C_1\ (3\cdot 2^1-3)+{}_{n-1}C_2\ (3\cdot 2^2-3)+{}_{n-1}C_3\ (3\cdot 2^3-3)+\cdots+{}_{n-1}C_{n-1}(3\cdot 2^{n-1}-3)$$
$$=\{{}_{n-1}C_0\ (3\cdot 2^0-3)+{}_{n-1}C_1\ (3\cdot 2^1-3)+{}_{n-1}C_2\ (3\cdot 2^2-3)+\cdots+{}_{n-1}C_{n-1}(3\cdot 2^{n-1}-3)\}-{}_{n-1}C_0\ (3\cdot 2^0-3)$$
$$=\{3({}_{n-1}C_0\ \cdot 2^0+{}_{n-1}C_1\ \cdot 2^1+\cdots+{}_{n-1}C_{n-1}\cdot 2^{n-1})-3({}_{n-1}C_0\ +{}_{n-1}C_1\ +\cdots+{}_{n-1}C_{n-1})\}-{}_{n-1}C_0\ (3\cdot 2^0-3)$$

ここで

$$(1+x)^{n-1}={}_{n-1}C_0\ x^0+{}_{n-1}C_1\ x^1+\cdots+{}_{n-1}C_{n-1}x^{n-1}$$

・$x=2$ を代入して

$$3^{n-1}={}_{n-1}C_0\ \cdot 2^0+{}_{n-1}C_1\ \cdot 2^1+\cdots+{}_{n-1}C_{n-1}\cdot 2^{n-1}$$

・$x=1$ を代入して

$$2^{n-1}={}_{n-1}C_0\ +{}_{n-1}C_1\ +\cdots+{}_{n-1}C_{n-1}$$

よって、

$$\{3({}_{n-1}C_0\ \cdot 2^0+{}_{n-1}C_1\ \cdot 2^1+\cdots+{}_{n-1}C_{n-1}\cdot 2^{n-1})-3({}_{n-1}C_0\ +{}_{n-1}C_1\ +\cdots+{}_{n-1}C_{n-1})\}-{}_{n-1}C_0\ (3\cdot 2^0-3)$$

$= 3 \cdot 3^{n-1} - 3 \cdot 2^{n-1}$

$= \boxed{3(3^{n-1} - 2^{n-1})}$

＜KD の一般化＞

（ⅰ） K…K のパターン数は　1

（ⅱ） □…□（□が n 個）のパターン数は　$3^n - (3 \cdot 2^n - 3)$

KD

	1	2 …	n
K	K	…	K
	□	…	□

よって、総パターン数は

$1 + 3^{n-1} - (3 \cdot 2^{n-1} - 3) = \boxed{3^{n-1} - 3 \cdot 2^{n-1} + 4}$

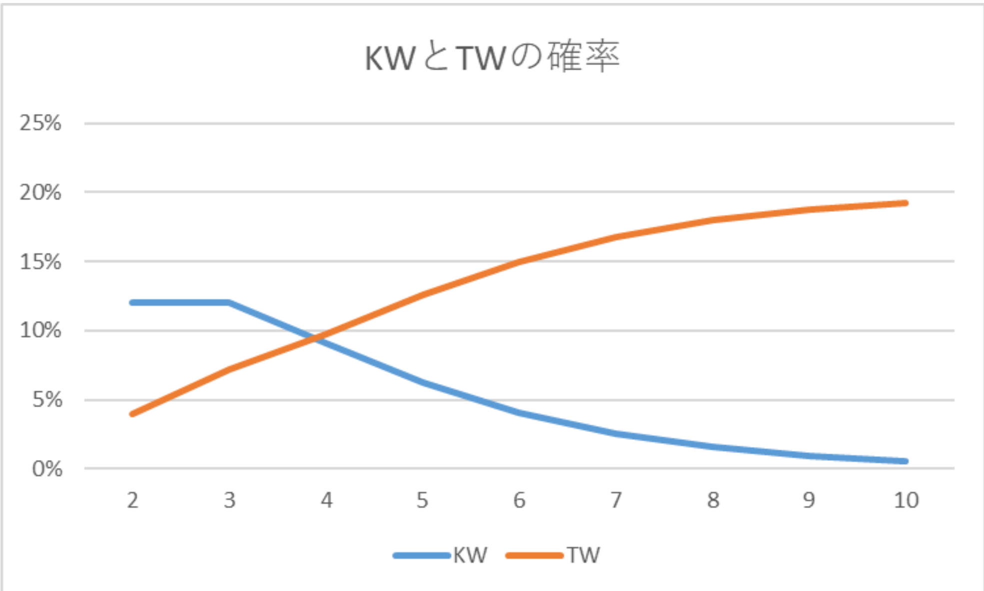
＜KL（＝TW）の一般化＞

ｎ人の時に、プレイヤー１が「K」を出す総パターン数は　5^{n-1}

よって

$$5^{n-1} - (KW + KD) = 5^{n-1} - (3(3^{n-1} - 2^{n-1}) + 3^{n-1} - 3 \cdot 2^{n-1} + 4)$$
$$= 5^{n-1} - (4 \cdot 3^{n-1} - 6 \cdot 2^{n-1} + 4)$$
$$= \boxed{5^{n-1} - 4 \cdot 3^{n-1} + 6 \cdot 2^{n-1} - 4}$$

以上の結果を利用し、確率表（10 人まで）及びグラフを作成しました。
人数を増やすと、KW と TL の勝率の差が大きくなることが分かります。
また、KW は０%に、TW は２０%に、それぞれ収束しそうな様子が見られます。



KWとTWの確率表

	KW	TW
2	12%	4%
3	12%	7%
4	9%	10%
5	6%	13%
6	4%	15%
7	3%	17%
8	2%	18%
9	1%	19%
10	1%	19%

そこで、収束値についても調べてみました。

＜KW の収束値＞

$$\frac{3\cdot(3^{n-1}-2^{n-1})}{5^n} = \frac{3(3^{n-1}-2^{n-1})}{5\cdot5^{n-1}} = \frac{3}{5}\left(\left(\frac{3}{5}\right)^{n-1} - \left(\frac{2}{5}\right)^{n-1}\right) \to 0 \quad (n \to \infty)$$

＜TW の収束値＞

$$\frac{5^{n-1}-4\cdot3^{n-1}+6\cdot2^{n-1}-4}{5^n} = \frac{5^{n-1}-4\cdot3^{n-1}+6\cdot2^{n-1}-4}{5\cdot5^{n-1}} = \frac{1}{5} - \frac{4}{5}\cdot\left(\frac{3}{5}\right)^{n-1} + \frac{6}{5}\cdot\left(\frac{2}{5}\right)^{n-1} - \frac{4}{5}\cdot\left(\frac{1}{5}\right)^{n-1} \to \frac{1}{5} \quad (n \to \infty)$$

推測が正しいことが証明されました。

４．感想と今後の課題

・自分たちが作ったじゃんけんを楽しむためには、人数が多すぎても少なすぎてもいけないということを数値で実感できて、感動しました。

・今回は数学的確率の考え方で確率を計算しましたが、統計的確率で考えるとどうなるのか、探ってみたいです。

・今回は実際にじゃんけんを行い検証するまでに至らなかったので、今後実験してみたいです。

５．その他、参考文献

・「賭博黙示録カイジ⑧～⑫」（福本伸行　講談社）

＊オリジナルじゃんけん製作のため、「E カード」を参考にした。

（２０１９．１．２６　第１０８回　数学教育実践研究会　にて発表）