

遊びの中の数理(web版)

ーワークシートー

1. みんなで遊ぼう

(3) ラインクロス

4	6	5
0	2	1
2	4	3

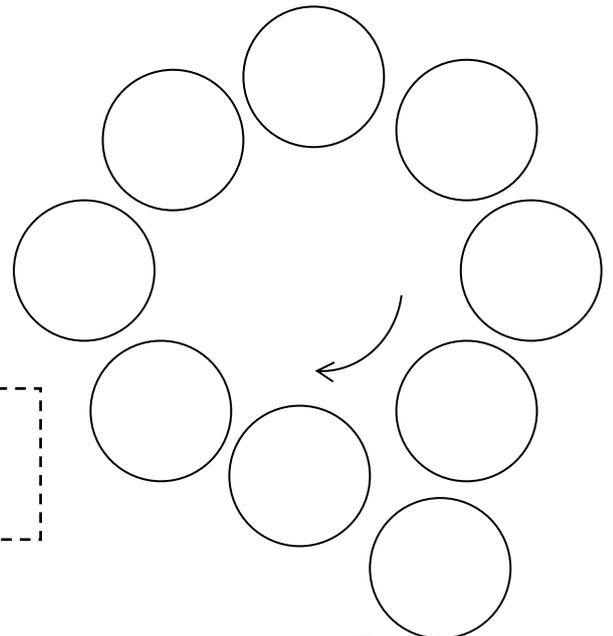
(2) ダイヤル回し

- ① 好きな数を思い浮かべてください。
(5以上をお願いします!)
- ② 「S」に人差し指を当ててください。
- ③ ①で決めた数の分、指を移動します。
ただし、円内に入ったら「反時計回り」で、「円から出ないように」回ってください。
- ④ ③で止まった位置から、「時計回り」に「円から出ないように」回ってください。
- ⑤ 最後に必ず決まった位置に止まります。

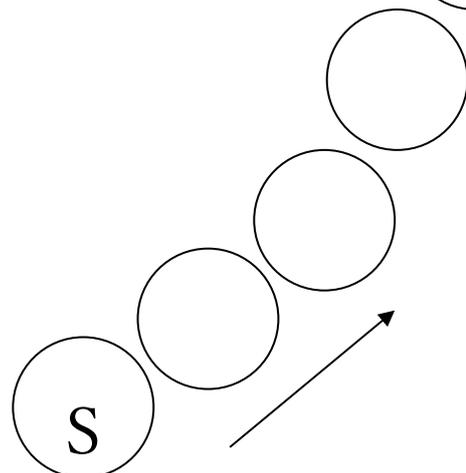
(好きな数)

- ① 好きな列・好きな行を選んで線を引いてください。
- ② 線がぶつかったマスの数字に○をつけてください。
- ③ ○の数字(3つ)を足してください。

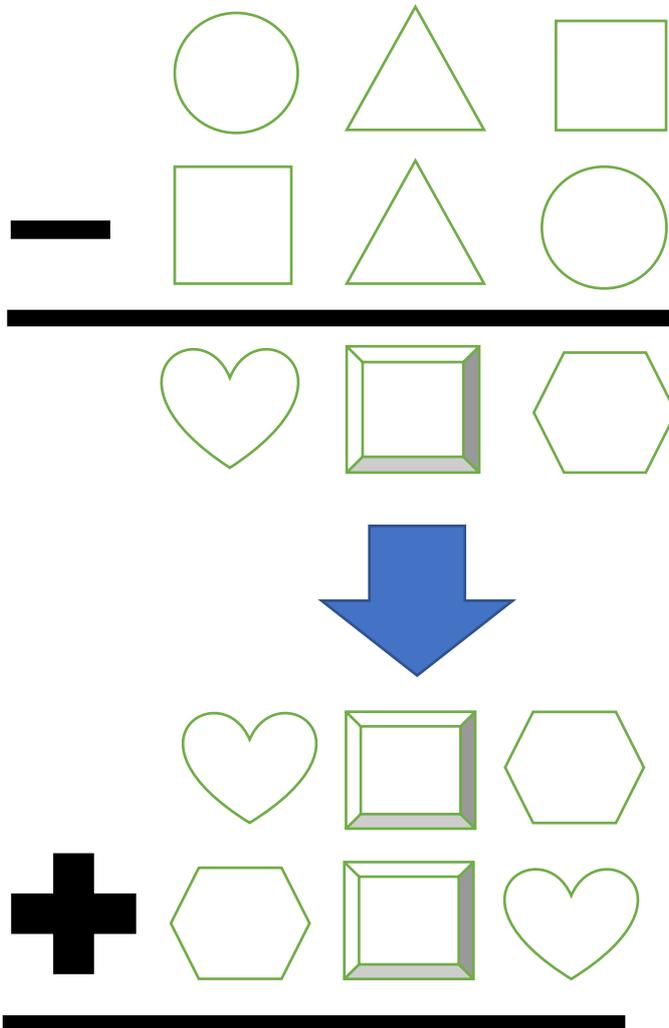
$$\square + \square + \square = \square$$



0



(4) 入れ替えてなんぼ *同じ形のマスに同じ数を入れると、計算結果が決まった数になります。



(3) 超能力カード

A

17	19	29	1
23	15	7	13
31	3	21	5
11	9	27	25

D

30	26	9	8
12	29	15	14
11	24	27	25
13	31	28	10

B

26	22	27	2
6	18	7	15
3	23	19	30
14	10	31	11

E

20	30	19	16
25	17	22	26
21	23	24	18
28	27	31	29

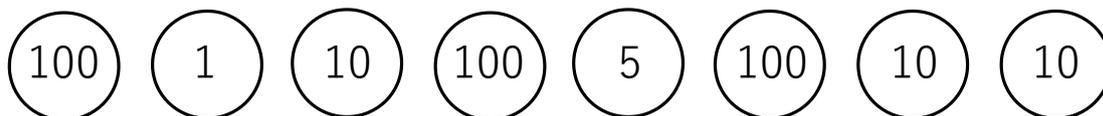
C

7	21	29	4
20	15	5	14
31	12	6	13
30	23	22	28

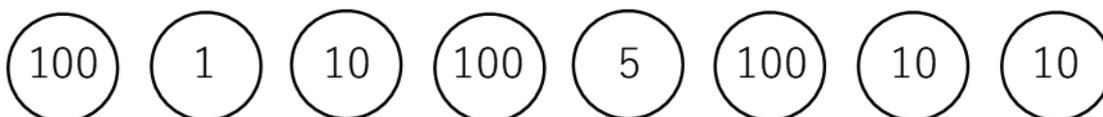
3. 市松模様で遊ぼう

- (1) コイン拾い *2人で交互に1枚ずつコインを拾って、合計額を競います。
ただし、取れるコインは右端または左端のコインのみとします。

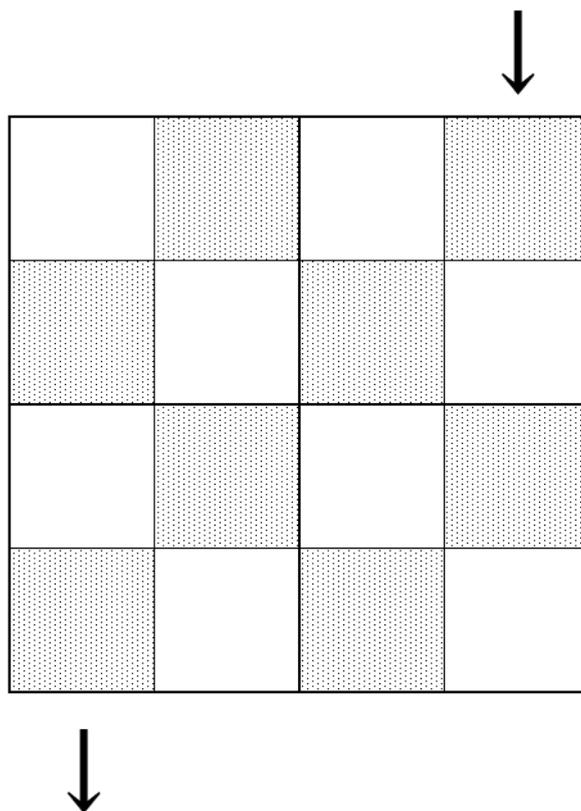
<1回目用>



<2回目用>

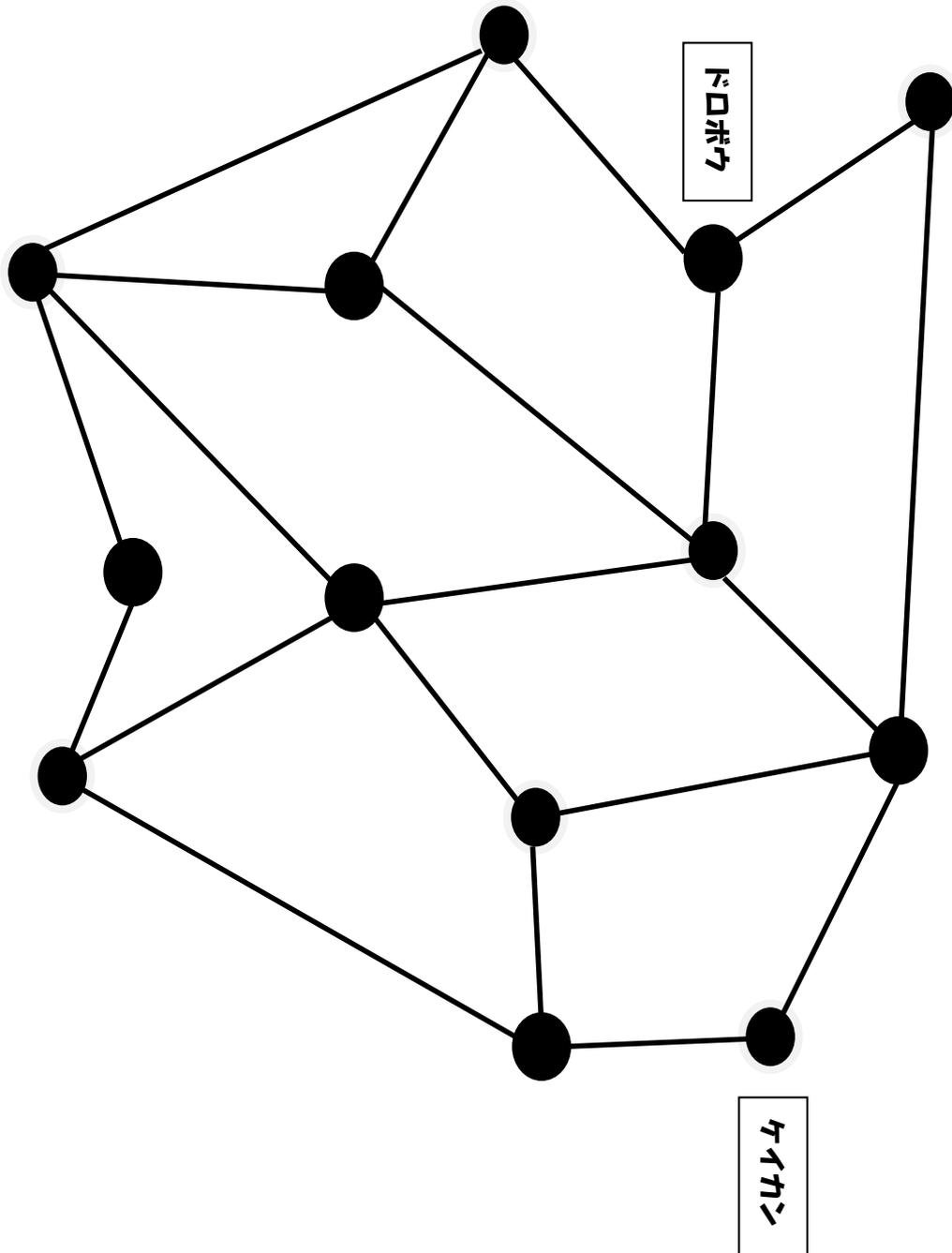


- (2) 一筆書き *16マスの部屋をすべて通ることはできますか？(移動は上下左右のみ)



(3) 警官と泥棒

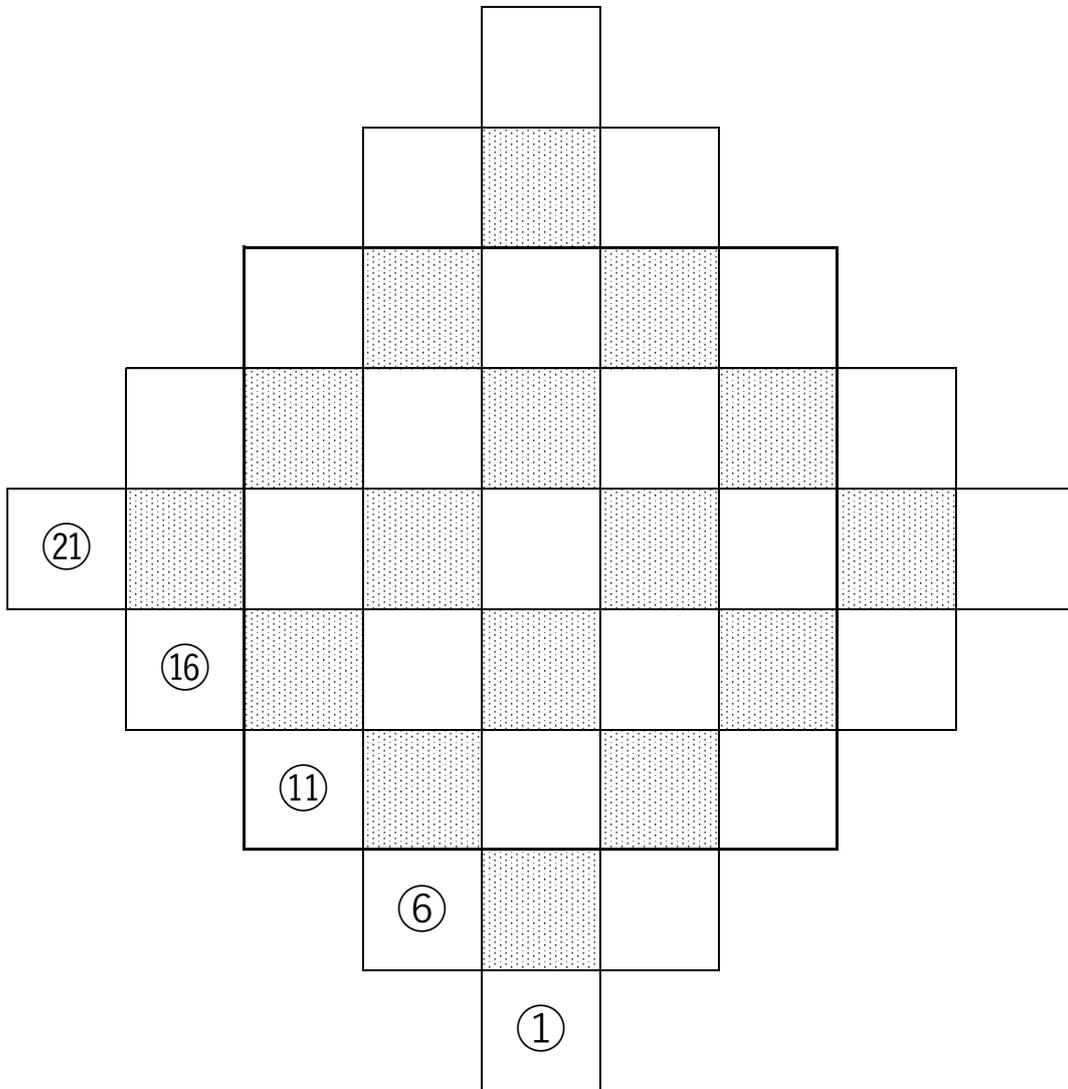
ドロボウはケイカンにつかまえられないように ケイカンはドロボウをつかまえるように
1コマずつごかそう！（逃げるじゅんぱんは 「ドロボウ」が先だよ！）



(4) 魔法陣

(バシエーのテラス法)

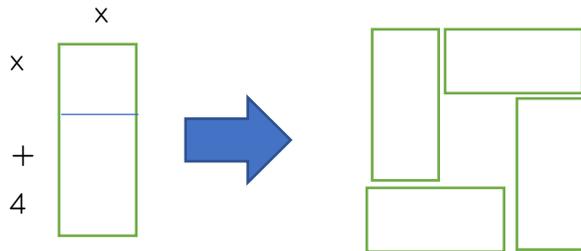
- ① 「1」から右上に「2, 3, 4…」を書き込む
- ② 「6」から右上に「7, 8, 9, …」を書き込む
- ③ 以後「11, 12, …」「16, 17, …」「21, 22, …」を同様に書き込む。
- ④ テラス(正方形の外)の3つの数を、
左の3つ→右に5マス平行移動 上の3つ→下に5マス平行移動
右の3つ→左に “ 下の3つ→上に “
- ⑤ 魔法陣のできあがり



4. 工作で遊ぼう

(1) 4倍法

長方形4つを正方形の形に組んで(隙間があっても可)、
 $x(x+4)=24$ を解こう。



面積から

(4長方形の和) = (外正方形) - (内正方形)

$$4x(x+4) = (2x+4)^2 - 4^2 = 24 \quad \text{が成立}$$

(2) プラネタリウム (材料…ヒッパルコス星表・EXCEL・grapes・型紙・厚紙・押しピン・はさみ・のり)

数学研究部「あるご」では、座標変換を用いてプラネタリウムを2度、作成しました。

プラネタリウムは「スクリーン」と「投影機」を必要としますが、

1度目は、直径4mの巨大スクリーンと正八角形回転体の投影機で、2000個の星を投影しました。

(残念ながら、スクリーンが湿気で濡れてしまったのですが…)

2度目は、2人用簡易テントをスクリーンに、立方体の投影機で6つの代表的な夏の星座を投影しました。

(こちらは来場者が工作をし、お持ち帰り可能としました。)

本レポートでは、1度目の大型プラネタリウムの製作過程と、2度目のプラネタリウムの設計図を掲載します。筆者は多様体を研究していましたが、座標変換の効果を実感したのは初めてで、この感動を皆様にも味わっていただきたいと思います。

<第1弾 巨大プラネタリウムの製作過程>

プラネタリウムができるまで

「あるご」が学校祭で展示を行うのも、もう4回目になりました。これまでの学校祭では、巨大な「ハノイの塔」を製作したり、本物の水を利用して数学パズルを解くなど、大胆な試みを行ってきました。今回はその集大成として「プラネタリウム」を製作しました。しかし…

「え？プラネタリウムって理科部がやるんじゃないの？」と思った方が多いのではないのでしょうか？

実はプラネタリウム作りには、天文知識よりも数学力が必要なのです。

そのことを皆さんに理解していただくために、このプラネタリウム製作の裏側を皆さんにお見せします。

<概要>

今回は、「スクリーン＝球体」「投影機（恒星球）＝正八角形回転体」として製作しました。

その際、投影機に穴をあけることで星を表現しますが、スクリーンと投影機の形が異なるため、球体上の星の位置に対応した回転体の位置を割り出す必要があります。この作業を「座標変換」と呼びますが、この作業こそがプラネタリウム製作の要なのです。

<作業工程>

①設計図を作成する

スクリーンと投影機の半径を決定すると、図形上の全ての値が算出できます。

スクリーンは小学校の算数程度で算出可能ですが、回転体は高校の三角比を駆使して算出します。数学研究部の腕の見せ所です。

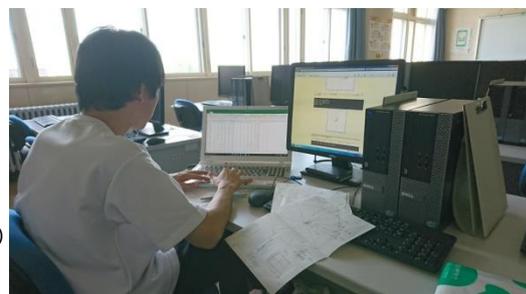
②星表データを取り込む

夜空の星達を「天球」と呼ばれるスクリーンに投影されているものと考えます。すると、地球上の位置が緯度・経度で示されるように、星の位置も2つの角度で表すことができます。そのデータはNASA等の国家機関で公表されており、今回は「ヒッパルコス星表」というデータを利用しました。

③座標変換を行う

投影機を展開した際に、円形になる部分と帯状になる部分が分かります。

円形の部分は極座標で、帯状の部分は $x y$ 座標として、天球の位置データをそれぞれの座標データに変換します。難しそうな印象を受けますが、初等幾何（中学生の図形）と三角比（数Ⅱ程度）の知識があれば、この作業ができます。



④パーツを切り出す

スクリーンを地球儀の経線に沿って24分割した三角形を作ります。また、そのまま曲面にすると素材の柔軟性等が問題となるため、三角形をさらに細かく台形に分割します。



⑤スクリーンを塗装する

星の色は一般的に白なので、スクリーンも白色に塗装します。全行程の中で、あまり数学を意識せず作業できる行程ですが、根気が必要です。



⑦穴を空ける

星には「等級」という明るさを示す数値があります。今回のプラネタリウムは投影機の穴の大きさを変えることによって明るさを表現していますが、そのために等級ごとに太さが違う針を使って穴を空けました。

⑥投影機を作成する

設計図を基に投影機を作成します。その際、先にモデルを作成し、星の座標変換が正しく行われているかをチェックしながら、実物の作成にかかります。

⑧組み立てる

パーツをガムテープで結合し、スクリーンを作成します。光の漏れがあれば、黒ビニール等で補修します。

ちなみに遮光が保たれていれば、光源は豆電球で間に合います。



⑨微調整を行う

投影機の角度や星の映り具合等を確認し、調整します。

⑩完成

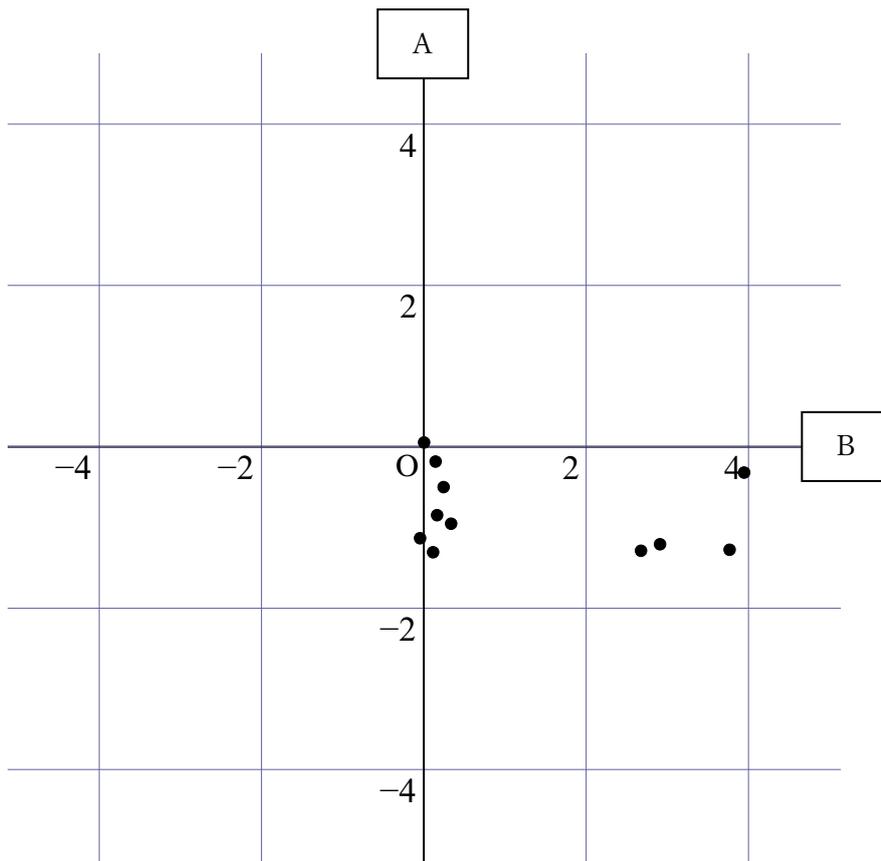
構想から約2週間。プラネタリウムの完成です。

<第2弾 立方体プラネタリウム>

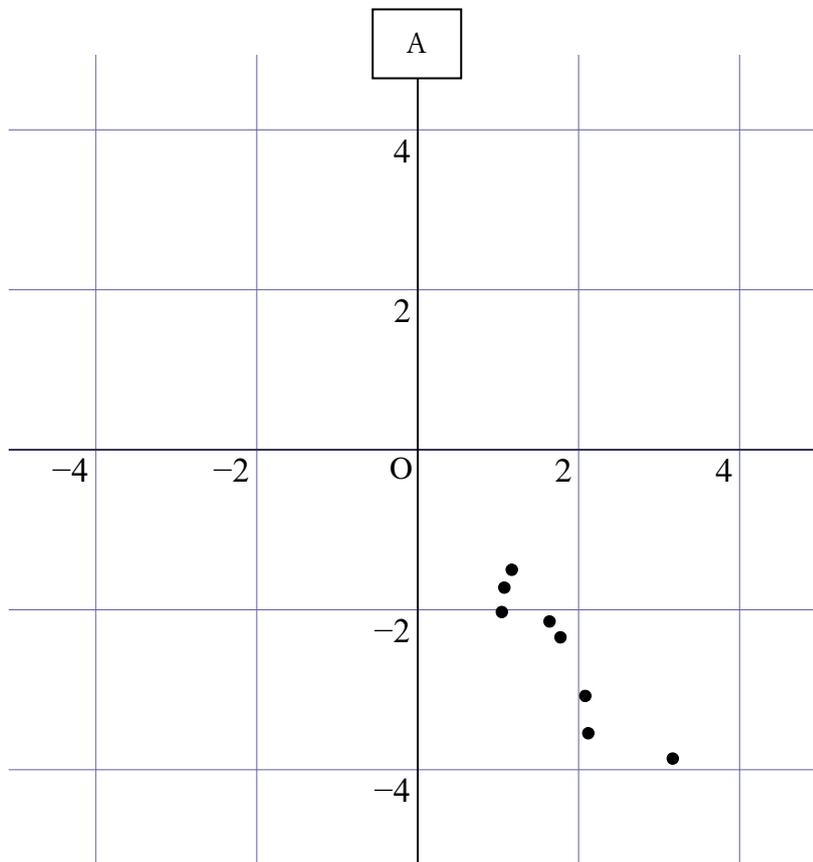
*天面に使用したデータ(抜粋)

番号	赤経(時)	赤経(分)	赤経(秒)	度数	ラジアン	赤緯(符号)	赤緯(度)	赤緯(分)	赤緯(秒)	度数	ラジアン	等級	グループ		
11767	2	31	47.08	37.95	0.662	0.662	1	89	15	50.9	89.26	1.558	0.011823	2	1
85822	17	32	12.9	263.05	4.591	4.591	1	86	35	10.8	86.59	1.511	0.055311	4	1
82080	16	45	58.16	251.49	4.389	4.389	1	82	2	14.1	82.04	1.432	0.129061	4	1
100965	20	28	14.45	307.06	5.359	5.359	1	81	25	21.6	81.42	1.421	0.139438	5	1
111056	22	29	52.97	337.47	5.89	5.89	1	78	49	27.6	78.82	1.376	0.18228	5	1
77055	15	44	3.46	236.01	4.119	4.119	1	77	47	40.2	77.79	1.358	0.19962	4	1
99255	20	8	53.32	302.22	5.275	5.275	1	77	42	40.9	77.71	1.356	0.201555	4	1
116727	23	39	20.98	354.84	6.193	6.193	1	77	37	55.1	77.63	1.355	0.202523	3	1
69112	14	8	51.01	212.21	3.704	3.704	1	77	32	50.8	77.55	1.354	0.203492	5	1
76008	15	31	25.05	232.85	4.064	4.064	1	77	20	57.6	77.35	1.35	0.20737	5	1
9727	2	5	7.05	31.28	0.546	0.546	1	77	16	53.2	77.28	1.349	0.208341	5	1
87234	17	49	26.94	267.36	4.666	4.666	1	76	57	44.2	76.96	1.343	0.214174	5	1
94083	19	9	9.75	287.29	5.014	5.014	1	76	33	38.9	76.56	1.336	0.221	5	1
9763	2	5	31.58	31.38	0.548	0.548	1	76	6	54.4	76.12	1.329	0.227849	5	1
79280	16	10	49.53	242.71	4.236	4.236	1	75	52	39.1	75.88	1.324	0.232755	5	1
79822	16	17	30.5	244.38	4.265	4.265	1	75	45	16.9	75.75	1.322	0.234721	5	1
70692	14	27	31.52	216.88	3.785	3.785	1	75	41	45.4	75.7	1.321	0.235705	4	1
92112	18	46	22.26	281.59	4.915	4.915	1	75	26	1.7	75.43	1.317	0.239645	5	1
114222	23	7	53.84	346.97	6.056	6.056	1	75	23	15.3	75.39	1.316	0.240631	4	1
101260	20	31	30.4	307.88	5.374	5.374	1	74	57	16.8	74.95	1.308	0.24854	5	1
3721	0	47	46.02	11.94	0.208	0.208	1	74	50	51.3	74.85	1.306	0.250523	5	1
72607	14	50	42.4	222.68	3.886	3.886	1	74	9	19.7	74.16	1.294	0.262464	2	1
111532	22	35	45.78	338.94	5.916	5.916	1	73	38	35.3	73.64	1.285	0.271473	5	1
94648	19	15	33.29	288.89	5.042	5.042	1	73	21	18.8	73.36	1.28	0.276499	4	1
108535	21	59	15.1	329.81	5.756	5.756	1	73	10	49	73.18	1.277	0.279521	5	1
7650	1	38	30.94	24.63	0.43	0.43	1	73	2	24.3	73.04	1.275	0.28154	5	1
89937	18	21	2.34	275.26	4.804	4.804	1	72	44	1.3	72.73	1.269	0.287609	4	1
9598	2	3	26.19	30.86	0.539	0.539	1	72	25	16.5	72.42	1.264	0.292684	4	1

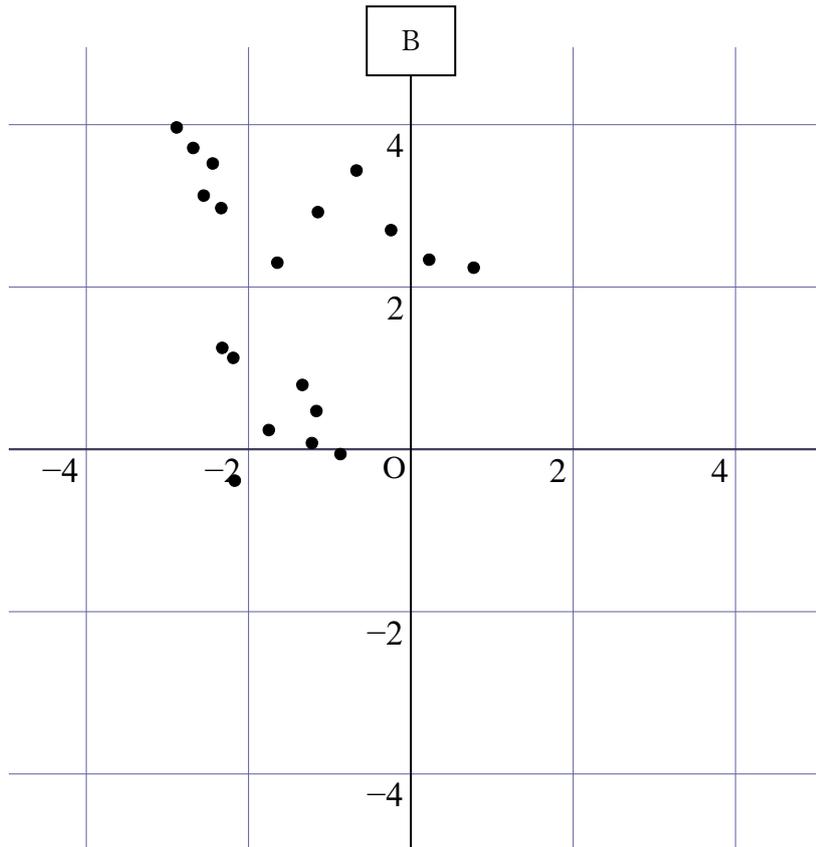
(星表) (天面)



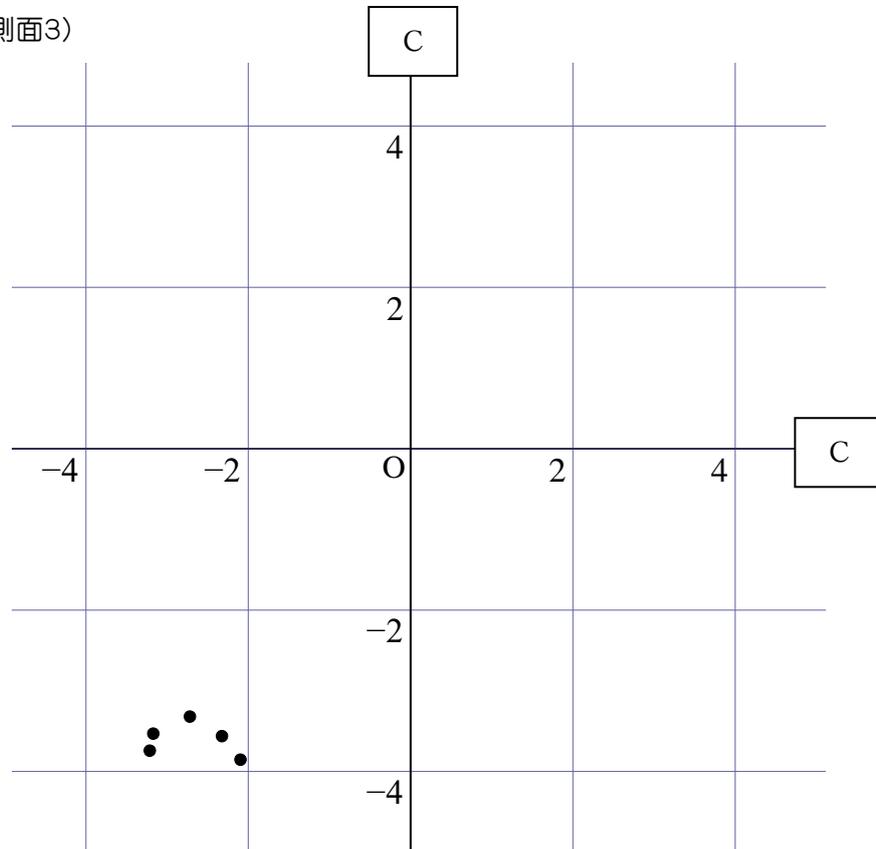
(側面1)



(側面2)



(側面3)



- * 立方体の6面のうち、2面は面なしです(6星座を構成する星が存在しないため)
- * □ は接続辺を示しています。同じ文字のある辺どうしを接着してください。
- * 台座を作り、台座の体面に天面が配置されるよう、立方体を置いてください。
- * 台座は地軸の傾きを考慮して、傾けてください。

<第2弾で投影される星座解説> *部員作成

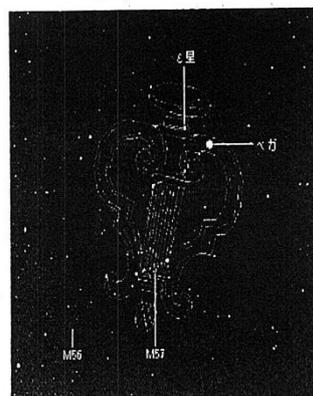
こと座 (Lyra)

こと座が見ごろになるのは夏と秋にかけての宵のころです。真上を見上げると七夕でおなじみの織女星ベガが見えます。このベガはあの有名な「夏の大三角」のひとつを担う星です。

この琴には名前があり「オルフェウスの竖琴」といいます。ギリシアの竖琴の名人オルフェウスがこの竖琴を弾くと人間はもちろん森や動物たちが聞きほれるほどの音色が流れたと神話に描かれています。

7月7日の夜、織姫星(おりひめ)と牽牛星(ひこぼし)の二つの星が年に1度のデートを楽しむ話は有名なのでここでは省きます。

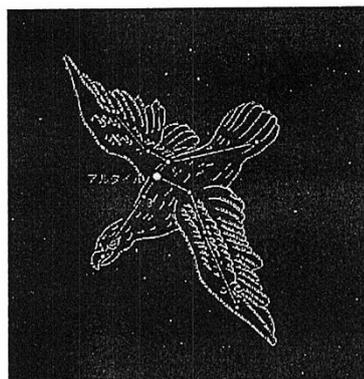
星座自体は小さいものの、有名な神話を残している星座、それが「こと座」です。



わし座 (Aquila)

夏の宵のころ、頭上に横たわる天の川の東岸に輝く七夕の牽牛星(ひこぼし)がわし座で一番明るい星アルタイルです。アルタイルもベガと同じく「夏の大三角」を担う星のひとつです。アルタイルの大きさは太陽の直径の1.9倍あり意外と大きいことが右の写真でもわかります。

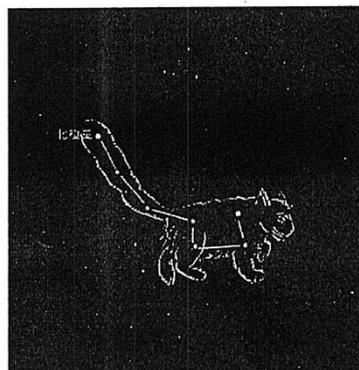
神話では、このわしは大神ゼウスとともにいて、毎日下界を飛び回って色々な情報をゼウスに伝える役目をしたといわれています。



こぐま座 (Ursa Minor)

おぼろな春の宵の北の空高く、まず目に付くのはかの有名な北斗七星です。しかし夜空には大小2個の北斗七星があります。大きいほうがおおぐま座の北斗七星、小さいほうがこぐま座の北斗七星です。こぐま座の北斗七星には不動の星と呼ばれる「北極星」があります。不動の星ということで昔の旅人は北極星を使って方角を定めていました。また、このような詩があります。「大ぐまのあしをきたに五つのばしたところ 小熊のひたいのうへは 空のめぐりのめあて」これは宮沢賢治の「星めぐりの歌」の一節です。この中で「空のめぐりのめあて」と歌われているのが、いつも真北の空にじっと輝いている北極星のことです。

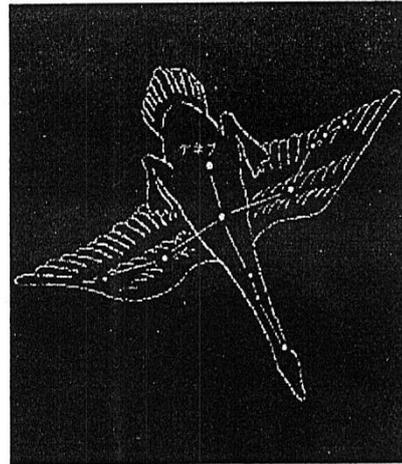
見つけやすい星座なのでぜひ一度探してみてください。



はくちょう座 (Cygnus)

南半球にかかる有名な南十字星に似ているところから、こちらは北十字星と呼ばれることもあります。また、天の川を飛ぶ白鳥の姿もすぐに思い浮かべることができます。この星座で一番有名な星は、デネブという星です。これもまた「夏の大三角」の一つを担う星なのです。

この白鳥の正体についてはいろいろな説があり、例えば、隣のこと座の持ち主オルフェウスが白鳥の姿となって、こと座のそばに置かれたのだと伝えられています。しかし、一般的には大神ゼウスが化身した白鳥とされています。

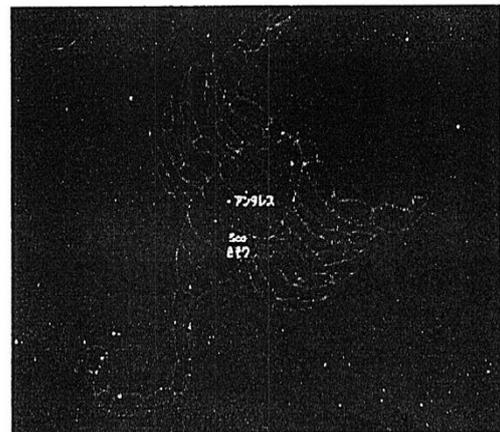


さそり座 (Scorpius)

さそり座は真冬のオリオン座とともに、最も形の整った美しい星座として人気の高い星座です。

さそり座のS字は、よく見ると釣り針にそっくりな形にも見えます。瀬戸内海のあたりでは「魚釣り星」とか「鯛釣り星」「漁星」とも呼ばれています。

さそり座のなかで一番有名な星はアンタレスという星です。こぐま座で紹介した宮沢賢治の「星めぐりの歌」では「さそりの赤い目玉」と書かれています。その名のおりアンタレスは赤くてとても大きいです。しかしアンタレスは大きく膨張しすぎたため爆発する日はそう遠くないかもしれません。



旭川南高校数楽研究部

(3) コマ(材料…厚紙・ひも・5円玉・筆記用具・串・接着剤)

「重心」という言葉は、高校数学に3度登場します。

数学Aの初等幾何、数学IIの座標平面、数学Bのベクトル。

そのとき、「重心とはバランスが取れる点である」という説明をしたことはありませんか？

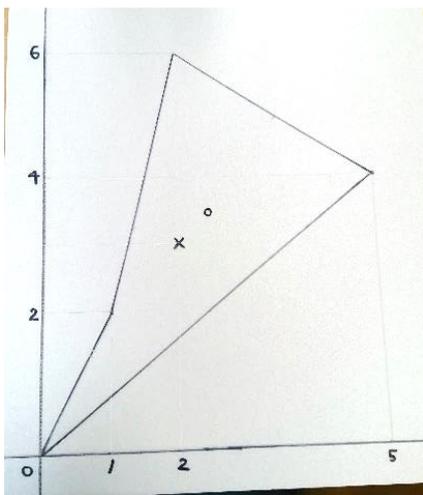
実は高校数学で扱う重心は「幾何学的重心」といい、一般的な重心は「物理学的重心」と呼び、両者は異なるものです(たまたま、三角形のときだけ一致しますが)。

コマを作る際には「物理学的重心」を求めますが、大体の位置であれば以下の方法で求めることができます。「重心」の導入後に、オリジナルコマを作って遊んでみてください。

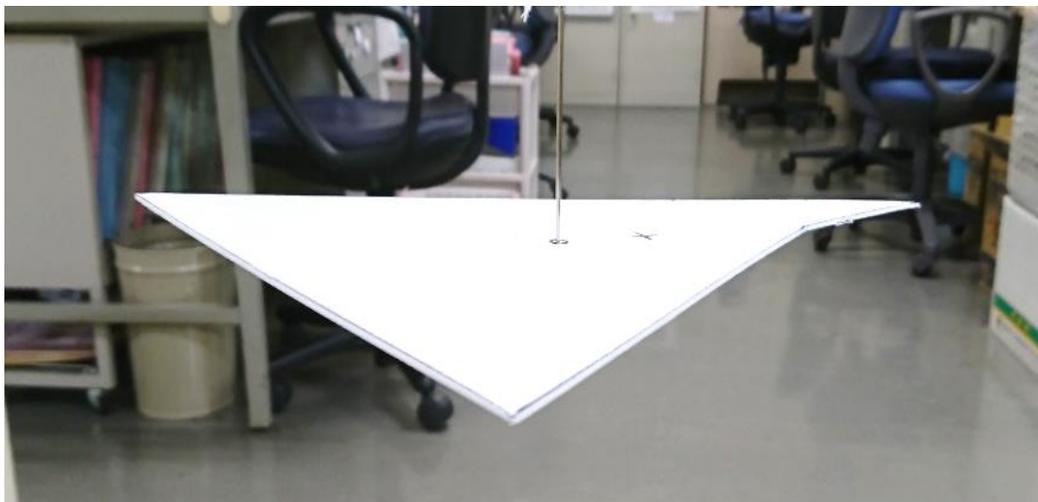
ただし、「教科書の重心とは違うよ。」との一言を添えて。

<重心の求め方> * ②を2回以上繰り返したとき、重心を通る線の交線が重心です。

- ① 「○」が「物理的」、「×」が幾何学的重心 ② 糸を垂らすと、重心を通る
(注)頂点に穴を通してください。



③ 抜群のバランスカ



(補足)

- 幾何学的重心は、重さを考慮しない重心です。このとき、図形は「重さのないワイヤーで作った」と捉えます。
- 物理学的重心は、重さを考慮した重心です。このとき、図形は「重さのある板を切って作った」と捉えます。
- 物理学的重心も、物理学の定義式を用いて、公式化することができます。
理数科のある学校では、課題研究に向いているテーマだと思います。

(4) テンセグリティ(材料…棒(6cm)×6本・輪ゴム×6本)

建築家「ケネス・スネルソン」が発案した芸術作品です。

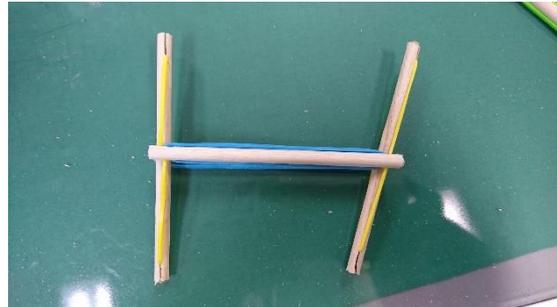
ゴムの張力で構成されているので、落としても、潰しても、形が崩れません。

科学館でも展示のお土産として好評でした。

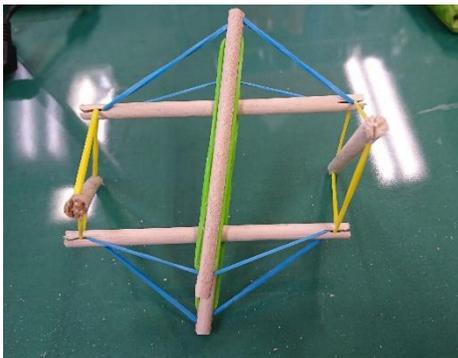
① 材料はこれだけ



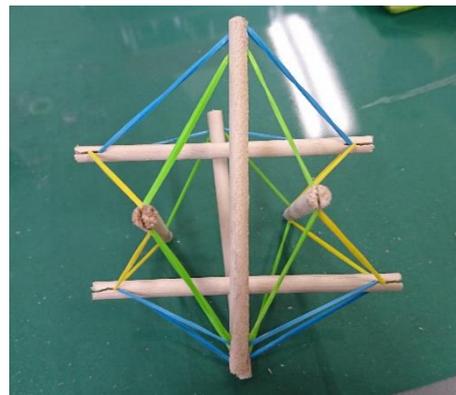
② H型に組みます



③ 2本の棒の間にさらに2本組んで…



④ ひっかけていない輪ゴムをかけると完成



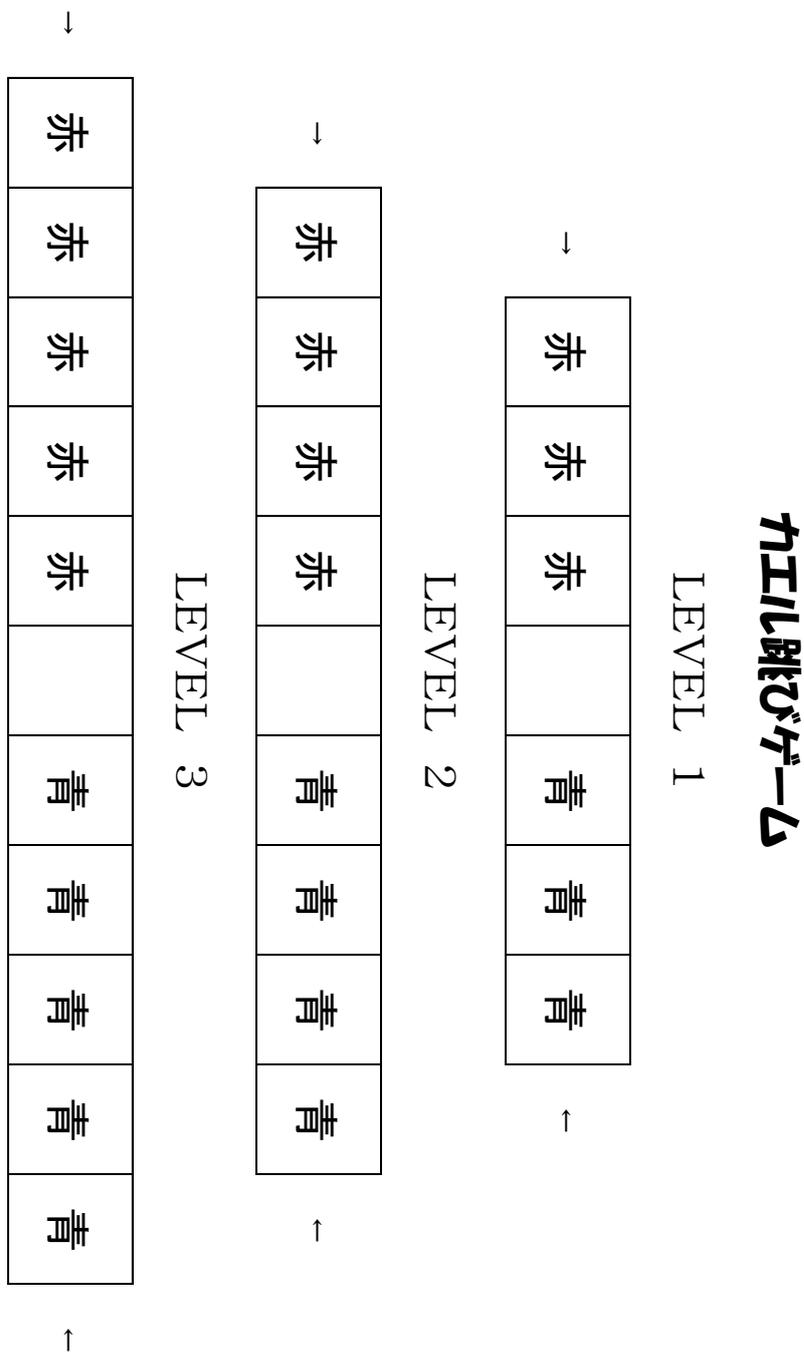
4. 名作ゲームで遊ぼう

(1) カエル跳びゲーム

作者は不明ですが、古来から数学ネタとして扱われている有名なゲームです。

「数学のいずみ」に掲載されている第 91 回数実研レポート「カエル跳びゲームの数理」には、遊び方の他、数理研究の実践例が7つ掲載されています。ゲーム本体だけでも、ルールの簡潔度、ゲームの難易度、ともに一般の方にちょうど良い題材です。

「カエル跳びゲーム」で検索できますので、是非ご覧ください。



(2) 石取りゲーム

2人で石を取り合うゲームです。正式には「ニム(nim)」と呼ばれます。

さまざまな種類が存在しますが、本レポートでは「1山・2山・3山くずし」を紹介します。

<1山崩し>

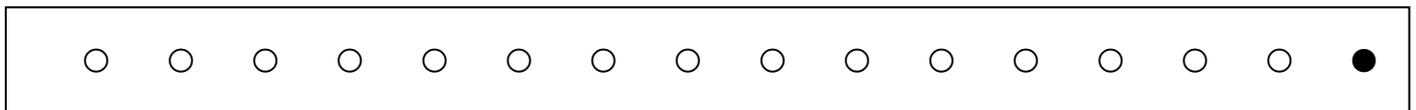
Try. 1

まずは、ゲームに慣れましょう。

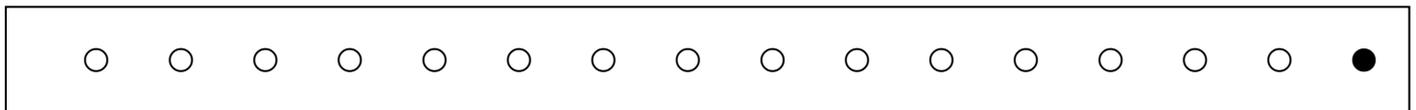
○が数字だと思って、2人交互に○を消してください。最後に●を消した方が負けです。

(○は最大3個まで消せます)

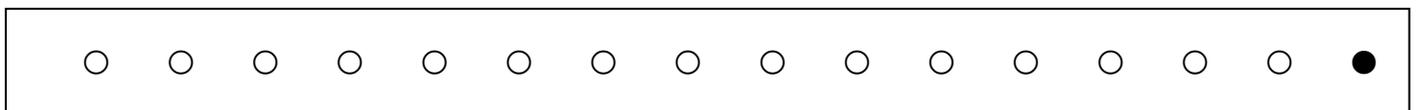
(1回目)



(2回目)



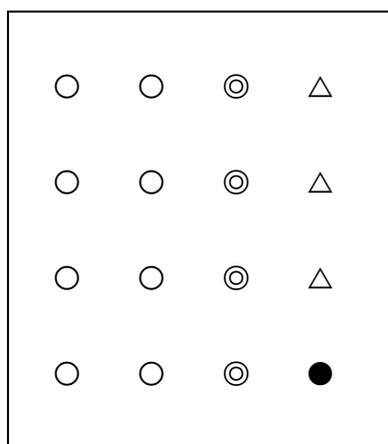
(3回目)



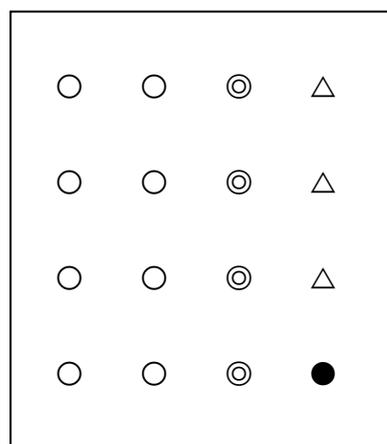
Try. 2

必勝法を見つけよう。

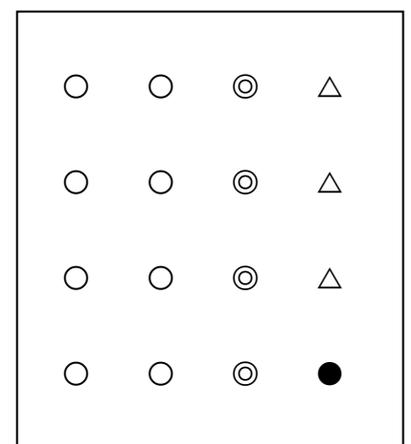
(1回目)



(2回目)



(3回目)



Try. 3

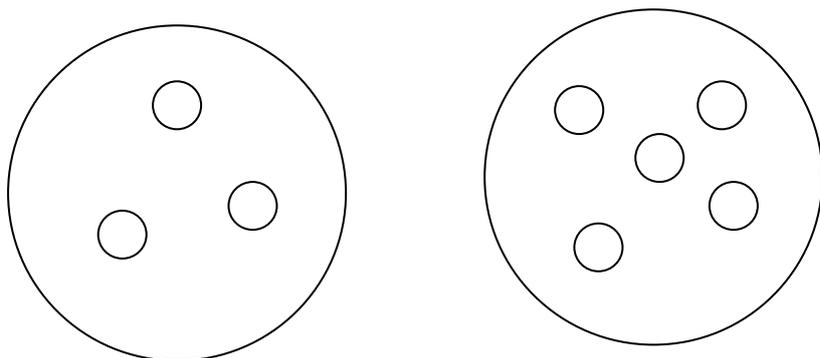
先生に必勝法を教えてください。

Try. 4

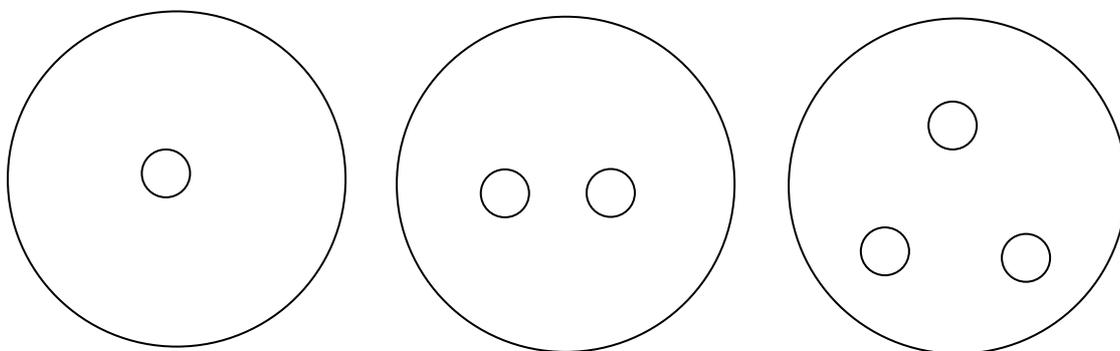
必勝法を体験してみよう。(1人1回ずつ勝利を味わってください)

<EXTRA GAME>

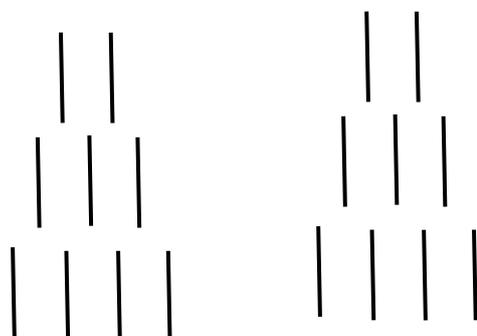
<2山くずし> * 2人で交互に石を取り合い、すべての石を取り去った人が勝ち。
ただし、石はどちらかの山から何個でも取ることができます。



<3山くずし> * 「2山くずし」と同じルールです。



<棒消し> * 「3山くずし」の変形です。(中身は同じ)



(第 102 回 数学実践研究会 夏季セミナーにて発表したものを改編)