両替問題より

小笠原　節
北海道富川高等学校

平成 16 年 10 月

概 要

大学の推薦入学試験に出題された両替問題をもとに少し考察してみた.
コンピュータ（＝電子計算機）も利用しているが, その計算能力には, 驚くばかりである.

1　推薦入試問題より

2004 年度の高知大理学部推薦入試に,
『10,000 円を 100 円玉,50 円玉,10 円玉に両替する方法は, 何通りあるか』
という出題があった.
また, 第 9 回日本数学オリンピック予選 (1999) の第 1 題目も,1000 円の両替問題であった.
『10 円玉,50 円玉,100 円玉がそれぞれ十分多くある．これらのうちから何個か (0 個のものがあってよい) 取り出して, その合計金額を 1000 円とする方法は何通りあるか.』
高知大理学部推薦入試の解答は，誘導形式によるものである。
(1) $50 \times n$ 円の 50 円玉,10 円玉への両替が $n+1$ とおりあることを知っておく.
(2) $100 \times n$ 円の 100 円玉,50 円玉,10 円玉への両替のしかたの場合の数を a_n とすると、100 円玉を少なくとも 1 枚使うか,100 円玉を全く使わないかを考えることによって,（後者は,(1) の $50 \times 2n$ に還元される）,

$$a_n = a_{n-1} + (2n+1) \qquad (n > 1)$$

であることがわかる．$a_1 = 4$ であるから,$a_0 = 1$ と定義すれば, 上式は $n = 1$ でも妥当である. これより,

$$a_n = (n+1)^2$$

となり, 始めの問題は 10201 とおりであることがわかる.

2　少し進めて

上記の問題の解法を使い, 両替の硬貨の種類をもう少し増やして考えてみた.

【命題1】**500円の100円玉,50円玉,10円玉,5円玉,1円玉への両替方法は,19161とおりある.**

証明の方針は上記と同様で, ただ, 段階的に考えていけばよい.

（証明）

$10 \times n$ 円の10円玉,5円玉,1円玉への両替方法の場合の数を a_n とすると上記と同様に,

$$a_n = (n+1)^2$$

となる. 次に,$50 \times n$ 円の50円玉,10円玉,5円玉,1円玉への両替方法の場合の数を b_n とする.

上記の(2)と同様に, 50円玉を少なくとも1枚使うか,1枚も使わないかを考える. 後者は,$50 \times n = 10 \times 5n$ だから,

$$\begin{aligned} b_n &= b_{n-1} + a_{5n} \\ &= b_{n-1} + (5n+1)^2 \end{aligned} \qquad (n > 1)$$

となる. b_1 は,50円玉を1枚使う1とおりと,50円玉を使わない $a_5 = 36$ との和だから,$b_1 = 37$ となる. したがって,$b_0 = 1$ と定義すれば, 上式は $n = 1$ でも妥当である.

$$\begin{aligned} b_n &= b_0 + \sum_{k=1}^{n}(5k+1)^2 \\ &= \cdots \\ &= \frac{1}{6}(n+1)(50n^2+55n+6) \end{aligned}$$

となる. さらに,$100 \times n$ 円の100円玉,50円玉,10円玉, 5円玉,1円玉への両替方法の場合の数を c_n とすれば, b_n を求めたときとまったく同様に,

$$c_n = c_{n-1} + b_{2n} \qquad (n > 1)$$

となる. b_1 のときと同様に,$c_1 = 159$ であり,$c_0 = 1$ と定義してよい.

$$\begin{aligned} c_n &= c_0 + \sum_{k=1}^{n} b_{2k} \\ &= 1 + \frac{n}{6}(100n^3+340n^2+371n+137) \\ &= \frac{1}{6}(n+1)(100n^3+240n^2+131n+6) \end{aligned}$$

となり, この式の n に 5 を代入すれば, 命題の結論が得られる.　　　　（証明終）

ここまでくると、どうしても 10,000 円の両替をしたくなるが,2,000 円札を考慮に入れると, 上記の方法がそのまま使えない.

したがって,（めったに私の手元に入ってこない）2,000 円札は無視することとし, 数学ソフトの Maple V のお世話になって, 先に進むことにする.

【命題 2】10,000 円の 5,000 札,1,000 円札,500 円玉,100 円玉,50 円玉,10 円玉,5 円玉,1 円玉への両替方法は,18155171408 とおりある.

（解説）

次のように記号を定義する.

$10 \times n$ 円の 10 円玉以下への両替方法 $\cdots a_n$ とおり

$50 \times n$ 円の 50 円玉以下への両替方法 $\cdots b_n$ とおり

$100 \times n$ 円の 100 円玉以下への両替方法 $\cdots c_n$ とおり

$500 \times n$ 円の 500 円玉以下への両替方法 $\cdots d_n$ とおり

$1000 \times n$ 円の $1,000$ 円札と 500 円玉以下への両替方法 $\cdots e_n$ とおり

$5000 \times n$ 円の $5,000$ 円札, $1,000$ 円札と 500 円玉以下への両替方法 $\cdots f_n$ とおり

$f(2)$ が求める数である.

以下は,Maple sheet であるが,Maple では, 記号 d は, 偏微分に使われており, ユーザーが関数として使用できないので,

$C1 = c_n$,$C2 = d_n$,$C3 = e_n$ として入力している.

最後の n の 6 次式が,f_n であり,$f(2) = 18155171408$ となる.

```
================ Maple Sheet（始まり）=====================

> A := n -> n^2+2*n+1;

     A := n -> n^2  + 2 n + 1

> factor(expand (1+sum(A(5*k),k=1..n)));

     1/6 (n + 1) (50 n^2  + 55 n + 6)

> B := n -> 25/3*n^3+35/2*n^2+61/6*n+1;

  B := n -> 25/3 n^3  + 35/2 n^2  + 61/6 n + 1

> factor(expand(1+sum(B(2*k),k=1..n)));
```

```
   1/6 (n+1) (100 n^3 + 240 n^2 + 131 n + 6)

> C := n -> 50/3*n^4+170/3*n^3+371/6*n^2+137/6*n+1;

 C := n -> 50/3 n^4 + 170/3 n^3 + 371/6 n^2 + 137/6 n + 1

> factor(expand(1+sum(C(5*k),k=1..n)));

    1/6 (n+1)(12500 n^4 + 29375 n^3 + 15800 n^2
                                     - 195 n + 6)

> C1 := n ->1/6*(n+1)*(12500*n^4+29375*n^3+15800*n^2-195*n+6);

C1 := n -> 1/6 (n+1)(12500 n^4 +29375 n^3 + 15800 n^2

> factor(expand(1+sum(C1(2*k),k=1..n)));

  1/18(n+1)(200000 n^5 + 802000 n^4 + 974050 n^3
                       + 300470 n^2 - 36357 n + 18)

> C2 := n -> 1/18*(n+1)*(200000*n^5+802000*n^4
                +974050*n^3+300470*n^2-36357*n+18);

C2 := n -> 1/18(n+1)(200000 n^5 + 802000 n^4
           + 974050 n^3 + 300470 n^2  - 36357 n + 18)

> factor(expand(1+sum(C2(5*k),k=1..n)));

  1/126 (n+1)(3125000000 n^6 +11465625000 n^5
       + 11985293750 n^4 + 1311429375 n^3
          - 1794180700 n^2  + 268893405 n + 126)

> subs(n=2,%);
                           18155171408

================ Maple Sheet (終わり) ====================
```

（解説終）

十進 Basic で検算してみることにする.

下のプログラムでは,a=500 としているので, 500 円の両替が求まるが,

私の 233MHz マシンは,1642.22 秒（28 分弱）かかって,

『19162 1642.22 秒かかりました』

と返してきた. プログラムでは,500 円硬貨自身への両替も数えているので, 上記の「命題 1」が検算されたことになる.

このペースでは,10,000 円の両替方法は, いつ終わるかわからない. プログラムの加速が課題である.

```
================ 十進Basic のプログラム(始まり) =====================
rem "両替問題 2004/10/25"
rem  a=両替金額,c=カウンタ
LET  a=500
LET  c=0
let t0=time
for k5000=0 to int(a/5000)
   for k1000=0 to int(a/1000)
      for k500=0 to int (a/500)
         for k100=0 to int (a/100)
            for k50=0 to int(a/50)
               for k10=0 to int(a/10)
                  for k5=0 to int(a/5)
                     for k1=0 to int(a/1) step 5
                        if a=1*k1+5*k5+10*k10+50*k50+100*k100+500*k500
                        +1000*k1000+5000*k5000 then LET  c=c+1
                     next k1
                  next k5
               next k10
            next k50
         next k100
      next k500
   next k1000
next k5000
print c
print time-t0;"秒かかりました"
end
================ 十進Basic のプログラム(終わり) =====================
```