幾何学と不変量
―数学オリンピックの問題への応用―

北海道大学・高等教育推進機構
西 森　敏 之

この講演では，数学の長い歴史の中で見つけられた，「不変量」とよばれるものの考え方を，実際に数学オリンピックの問題を解きながら，紹介します。

1. ウオーミング・アップ

まず，少し脳細胞のウオーミング・アップをします。

定義（分割合同）

平面上の2つの多角形 P と Q が **分割合同** とは，多角形 P をいくつかの直線で切って小片に分けてから，それらの小片を重ならないように辺で張り合わせてやって，多角形 Q が得られることをいう。

それでは次の問題を考えてみましょう。

問題 1a

一辺が長さ 1 の正三角形 P は，一辺が長さ 1 の正方形 Q と分割合同であるか？

問題 1a　の答

一辺が長さ 1 の正三角形 P は，一辺が長さ 1 の正方形 Q と分割合同ではない。

分割合同でない理由

分割合同である2つの図形は同じ面積をもつが，
正三角形 P の面積は $¥sqrt{3}/4$ であり，
正方形 Q の面積は 1 であり，等しくないから。

大事なことは，なぜこれらの図形が分割合同でないと判断したかということです。その理由は，「分割合同なら面積が変わらない（面積が不変量）」ということでした。

それでは，次の問題はどうでしょうか？

問題 1b

一辺が長さ 1 の正三角形 P は，同じ面積 の正方形 Q と分割合同であるか？

問題 1b　の答

P と Q は分割合同である。

実は，「2つの多角形が分割合同であるためには，それらの面積が同じであることが必要十分である」ということが成り立ちます。（証明してみてください。）

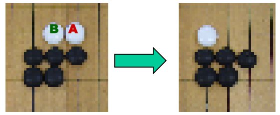
＜5＞

2. ある数学オリンピックの問題
— 基盤と碁石の問題—

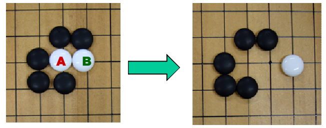
ある年の数学オリンピックの問題を述べるために準備をします。(ただし、チェス盤を碁盤に変えてあります。)

準備(碁石の操作)

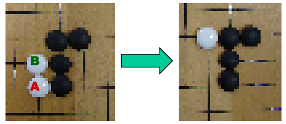
基盤上に石をいくつか格子点上に並べて，次の操作を考える。
ある石 A の縦または横に石 B が並び，その次の格子点には石が無いとする。
このとき，A を持ち上げて B を飛び越して空いている格子に置き，B を取り除く。



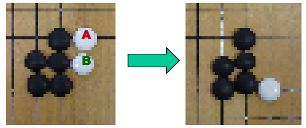
L:右の白石が左に飛び越す



R:左の白石が右に飛び越す



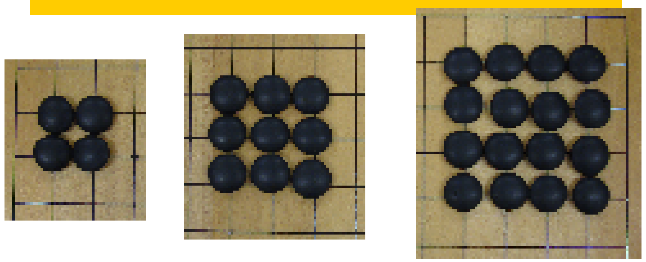
U:下の白石が上に飛び越す



D:上の白石が下に飛び越す

問題 2

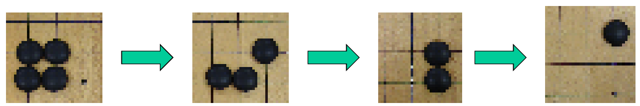
(充分に大きな)碁盤上に n^2 個の石を一辺 n の正方形のかたちに並べる。
上の操作をうまい手順で行って，最後に碁盤上に石が1個だけ残るようにできる n は， どのような自然数であるか。



＜8＞

3. 試行錯誤による方法

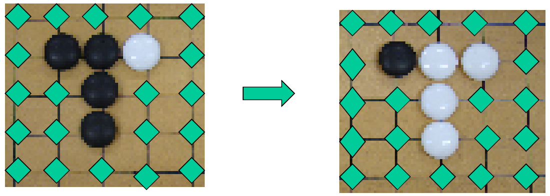
小さい n の場合を考えてみましょう。
まず，n = 1 のときは，既に1個しか石がないので，何もしなくても問題の条件を満たしています。
次に，n = 2 のときはどうでしょうか？



いろいろ操作をしていると、次のことに気がつきます。

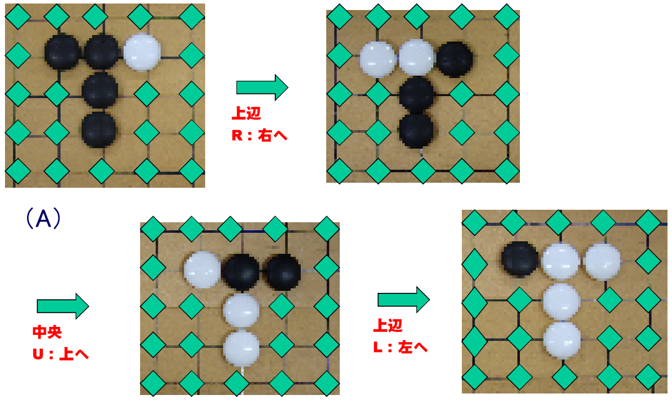
補題（T補題）

下の (A) のようなT型の石の配置があると, 3 回の操作によって (B) のようにできる：（ただし、白石は石がないことを意味し、◆ は石があってもなくてもよい）



（A）　（B）

補題（T補題）の証明



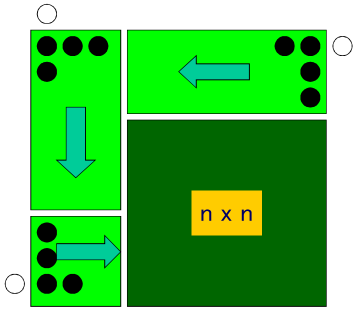
（B）

定理（T補題の応用）

(n+3) x (n+3) の正方形に置かれた石は、
何回かの操作によって、n x n の正方形にできる。

証明

右図に
T補題を適用して
3つの小ブロックを
消せばよい。



試行錯誤による方法の結論

n が 3 で割り切れないとき、
碁石の操作をしていって、
最後に1個が残るようにできる。

残った問題は、

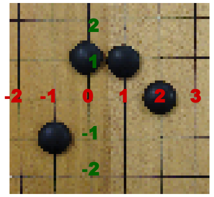
n が 3 で割り切れるとき、
碁石の操作をしていって、
最後に1個が残るようにできるか？

4. 不変量による方法

この問題に、不変量の考え方を適用してみよう。

基石の配置の数学的定式化

基盤上の格子点に基石をいくつか置いた状態は，
石が乗っている格子点の集合のことであると考える。



$= \{ (-1,-1),\ (0,1),\ (1,1),\ (2,0) \}$

碁石の操作は，次のように言い替えることができる。

(R)（右への飛び越し）

碁石の配置 G から（m，n），（m + 1，n） を除いて
（m + 2，n） を加える。

(U)（上への飛び越し）

碁石の配置 G から（m，n），(m，n + 1） を除いて
（m，n + 2） を加える。

他の碁石の操作 (L) (D) も同様である。

定義（碁石の操作の不変量）

無限に大きい碁盤の格子点は，2つの整数の組で表せるので，格子点の集合は積集合 Z×Z と見なせる。

碁石の配置 G は Z×Z の部分集合であるので，
すべての碁石の配置の集合Γは次のように書ける：
Γ：＝ P(Z×Z) = { G : G ⊂Z×Z }（冪集合）

写像Φ：Γ→ R が碁石の操作RULDに関する不変量であるとは，G∈Γ から 碁石の操作RULDで G´ が得られるとき， Φ(G) = Φ(G´) が成り立つことをいう。

不変量をつぎのような手順でつくる:

まず各格子点 (m, n) に実数 φ(m, n) を何らかの方法で与えておく，すなわち， 写像φ:Z×Z → R を考える。

次に写像Φ：Γ→ R を
Φ(G) = Σ{ φ(m, n) ：(m, n) ∈ G }
（G に属する (m, n) に関する総和）
により，定める。

4. 不変量による方法（つづき）　<17>

このようにして得られる写像Φ : Γ → Rが，
碁石の操作RULDに関する不変量になるための条件は

(R)　$\varphi(m-1, n) + \varphi(m, n) = \varphi(m+1, n)$
(U)　$\varphi(m, n-1) + \varphi(m, n) = \varphi(m, n+1)$
(L)　$\varphi(m+1, n) + \varphi(m, n) = \varphi(m-1, n)$
(D)　$\varphi(m, n+1) + \varphi(m, n) = \varphi(m, n-1)$

ところが，式 (R) と 式 (L) をあわせてみると，

$$\varphi(m, n) + \varphi(m, n) = 0$$

となるので，$\varphi(m, n) = 0$ となり，アイデアは破綻する。

<18>

5. 敗者復活戦

不変量のアイデアをあきらめずに，もう一度検討してみると，
不変量であるための必要条件である式
$\varphi(m, n) + \varphi(m, n) = 0$
から $\varphi(m, n) = 0$ が出たのがまずかったのです。
だから，2倍して 0 になっても，もともと 0 でない数があれば
よいのです。

大学の数学科の学生は，そういう世界を知っています。
それは Z/2Z = { 0, 1 } という要素が2つの集合を考えて
$0 + 0 = 1 + 1 = 0$,　$0 + 1 = 1 + 0 = 1$
のように足し算を定義したものです。

5. 敗者復活戦（つづき）　<19>

不変量による方法の結論

n が 3 で割り切れるとき、碁石の操作をしていって、
最後に1個が残るようにはできない。

問題 2（数学オリンピックの問題）の答のまとめ

一辺 n の正方形のかたちに碁石を並べたものは，
(1) n が 3 で割り切れないとき、碁石の操作をしていって、
最後に1個が残るようにはできるが，
(2) n が 3 で割り切れるときはできない。

5. 敗者復活戦（つづき）　<20>

証明の準備

Z/2Z = { 0, 1 } の要素を成分とする2行2列の行列の集合
M(2, Z/2Z) に成分ごとの足し算により足し算を定義する。
i = 1, 2, j = 1, 2 に対して，(i, j) 成分のみが 1 で他の成分が
0 であるM(2, Z/2Z)の元を A(i, j) とかく。
写像 ϕ : Z×Z → M(2, Z/2Z) を以下のものの繰り返しで
定義する：

0 mod 3	A(1, 2) + A(1, 1)	A(2, 2) + A(2, 1)	A(1, 2) + A(2, 2) + A(1, 1) + A(2, 1)
2 mod 3	A(1, 2)	A(2, 2)	A(1, 2) + A(2, 2)
1 mod 3	A(1, 1)	A(2, 1)	A(1, 1) + A(2, 1)
	1 mod 3	**2 mod 3**	**0 mod 3**

5. 敗者復活戦（つづき）　＜21＞

証明の準備（つづき）

写像 ϕ : Z×Z → M(2, Z/2Z) から総和の方法で作った
写像 Φ : Γ → M(2, Z/2Z) は 碁石の操作の不変量になる。

不変量の方法の結論の証明

碁石を一辺 n の正方形に並べたものをGn とする。
n が 3 でわりきれるとき，横に3個連続に並んだ石の組に
きれいにわけられるので，Φ(Gn) = 0 である。
一方，碁石1個の配置を G1 = { (m, n) } と書くと，
どんな m, n に対しても，ϕ(m, n) = 0 がなりたたないので，
Φ(G1) = 0 とはならない。
従って，Gn から碁石の操作を繰り返していって，最後に
1 個になるまで続けることはできない。　（証明終わり）

＜22＞

6. もう一つの問題

問題 3

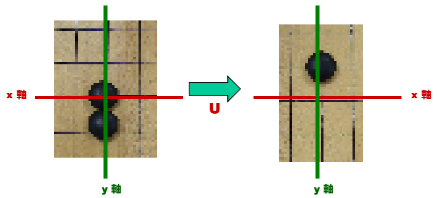
xy 平面上で，石をいくつか格子点に並べたものに対して，
問題 2と同じ操作を考える。
石を x 軸以下にいくつか並べたものから，石の操作を行い，
最後に y 軸上の点 (0, n) だけに石が 1 個残るようにする。

さて，このようなことが可能な n はどのような自然数で
あるか？

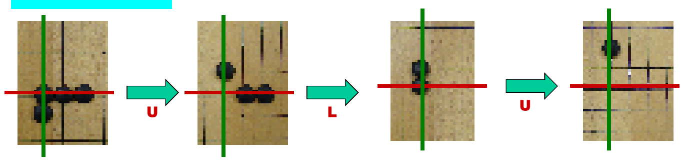
6. もう一つの問題（つづき）　＜23＞

小さい n の場合を考えてみましょう。

n = 1 のとき



n = 2 のとき



6. もう一つの問題（つづき）　＜24＞

問題 3（もうひとつの碁石の問題）の答

n = 1, 2, 3, 4のとき可能であり，n ＞ 4 のときは不可能である。

n = 3, 4のとき，可能であることを証明するのは
すこし複雑な碁石の配置をつくらなければいけないが
みなさまの楽しみとして残しておきます。

6. もう一つの問題（つづき） <25>

問題 3　$n = 5$ のとき，不可能であることの証明

２次方程式　$x^2 + x - 1 = 0$ の正数解を α とする。このとき，

$\alpha < 1$,　　$1 + \alpha + \alpha^2 + \cdots = 1 / (1 - \alpha)$

$\alpha^2 + \alpha - 1 = 0$,　$\alpha^2 + \alpha = 1$,　$\alpha^2 = 1 - \alpha$

がなりたつ。 写像 $\phi : Z \times Z \to R$ を

$\phi(m, n) := \alpha^{(|m| + |n - 5|)}$

により定め，写像 $\Phi : \Gamma \to R$ を前と同様に ϕ から定める。

6. もう一つの問題（つづき） <26>

補題

石の配置 G から，問題 2 のときと同じ碁石の操作 RULD により石の配置G´に到達できるとき，

$\Phi(G') \leqq \Phi(G)$

がなりたつ。

証明 （省略します）

写像 $\Phi : \Gamma \to R$ は不変量ではありませんが，操作するたびに， $\Phi(G)$ が小さくなっていくという性質があります。

6. もう一つの問題（つづき） <27>

$n = 5$ のとき，不可能であることの証明（つづき）

最後に y 軸上の点 (0, 5) に碁石が 1 個残ったとして
その配置を Gz とすると

$\Phi(Gz) = \phi(0, 5) = \alpha^{(|0| + |5 - 5|)} = 1$

x 軸上から下の格子点すべてに碁石を（無限個）おいたとして，その配置を Ga とし， $\Phi(Ga)$ を計算したい。

x 軸上の総和は $m = \cdots, -1, 0, 1, \cdots$ と $n = 0$ より

$\alpha^5 (1 + 2(\alpha + \alpha^2 + \cdots))$

$= \alpha^5 + 2\alpha^6(1 + \alpha + \alpha^2 + \cdots)$

$= \alpha^5 + 2\alpha^6 / (1 - \alpha) = \alpha^5 + 2\alpha^6 / \alpha^2$

$= \alpha^5 + 2\alpha^4$

6. もう一つの問題（つづき） <28>

$n = 5$ のとき，不可能であることの証明（つづき）

x 軸上から下の格子点すべての総和は

$\Phi(Ga) = (\alpha^5 + 2\alpha^4)(1 + \alpha + \alpha^2 + \cdots)$

$= (\alpha^5 + 2\alpha^4) / \alpha^2 = \alpha^3 + 2\alpha^2$

$= (\alpha + 2)\alpha^2 = (\alpha + 2)(1 - \alpha)$

$= -\alpha^2 - \alpha + 2 = 1$

もしも，最後に点 (0, 5) に 1 個だけになるx 軸上から
下の碁石の配置 G があったと仮定すると

$1 = \Phi(Ga) > \Phi(G) \geqq \Phi(Gz) = 1$

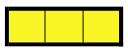
となり，矛盾である。　（証明終わり）

6. おまけ　トロミノ

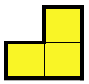
定義

同じ大きさの正方形を3つ辺で貼付けてできる
図形をトロミノという。

トロミノは下の2種類ある。



直線型トロミノ



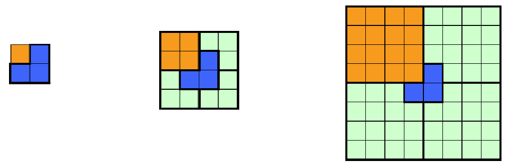
L型トロミノ

定理

チェス盤(8×8)から一つのマスを除いたものには，
21個のL型トロミノを重ならないように敷き詰められる。

証明

一辺が 2ˆn の正方形について，同様の定理が成り立つので
自然数 n に関する帰納法で示す。下図を見よ。



問題 4

チェス盤(8×8)からどのマスをひとつ除けば，21個の
直線型トロミノを重ならないように敷き詰められるか？

解答　(1)必要条件

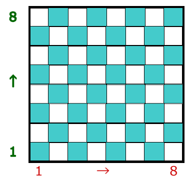
チェス盤のマスを碁盤の格子点と対応させて，
問題 2 のために使った写像 ϕ : Z×Z → M(2, Z/2Z) と
総和の方法で作った写像 $\Phi : \Gamma \to$ M(2, Z/2Z) を考える。

補題　直線型トロミノを重ならないように敷き詰めた
　　　図形 G に対して，Φ(G) = 0 がなりたつ。

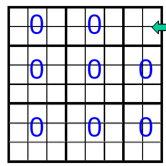
従って，マス (i, j) が問題4の答とすると，
Φ(チェス盤) = Φ(チェス盤 − マス (i,j)) + ϕ (i,j) = ϕ (i,j)
↑ これは 0

解答　(1)必要条件(つづき)

チェス盤の左下すみのマスを格子点 (1, 1) と対応させて，チェス盤を
G8 とかくと，　Φ(G8) = A(1,1) + A(1,2) + A(2,1) + A(2,2)



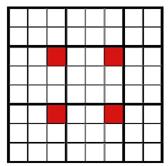
チェス盤



A(2,1) + A(2,2)
+ A(1,1) +
A(1,2)

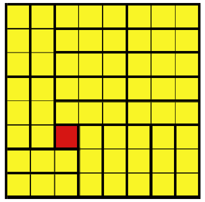
ϕ の総和の計算法:
縦または横に3つ並んだ
ものの総和は0になる

ϕ (i, j) = A(1,1) + A(1,2) + A(2,1) + A(2,2)
を満たすマス (i, j) は 右図の赤色のマスである。
従って，これらのマス以外は答にはならない。



解答 (2)十分条件

チェス盤の格子点 (3, 3) を除いた図形には, 図のように,
直線型トロミノが重ならないように敷き詰めることができる。



解答のまとめ:

問題4の答は,
次の4マス:
(3, 3)
(3, 6)
(6, 3)
(6, 6)