平面ベクトルの導入について

北海道紋別北高等学校　三上敬揮

１．ベクトルの導入にあたって

ベクトルを、「成分」を主役にして導入する方法を、２年間実践してみました。すると、「内積」の手前までを３時間程度で紹介でき、ベクトルの全体像を短時間で生徒に提示できました。数学 B は２単位科目であり、教科書どおりに指導すると、興味深い題材にたどり着くのにかなりの期間を要します。

まず、ベクトルの全体的な概念をコンパクトに消化することにより、ベクトルの面白さを伝える一つの方法となると考えました。

基本ベクトルなどの細かい部分は省略した授業案になりますが、この授業の目的として、

① 短時間で、重要なテーマにたどりつく
② とりあえずベクトルの全体像をつかむことで、この分野への興味を喚起し、より詳細へ突入する意欲を掘り起こす

ことを意図しています。

２．「平面ベクトル」テキストの構成について

次の２分野に分けています。

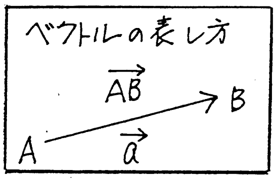
・テキスト（Part1）→「ベクトルの導入」から「内積の直前」まで
・テキスト（Part2）→「直線のベクトル方程式」および「点の存在範囲」

他の分野については、まだ作成中です。今後、追加していきたいと考えています。

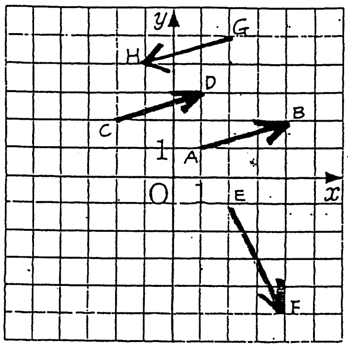
「平面ベクトル」テキスト（Part 1）

〈1〉 ベクトル

位置は問題にしないで、「向き」と「大きさ」だけに着目したものを<u>ベクトル</u>という。



右図のように、矢印を $\overrightarrow{AB}$ とか $\vec{a}$ と表す。



ベクトルを成分で表そう。

$\overrightarrow{AB} = ($ ＿＿ , ＿＿ $)$
x軸方向　y軸方向

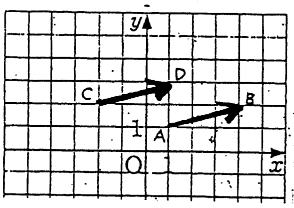
$\overrightarrow{CD} = (\quad , \quad)$

$\overrightarrow{EF} = (\quad , \quad)$

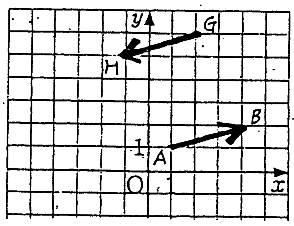
成分が同じベクトルは等しい。例えば、右図のとき

$$\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD}$$

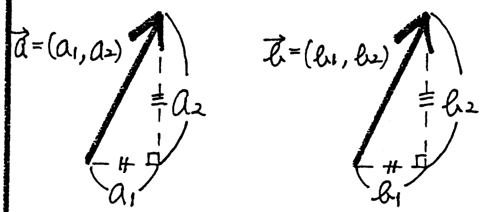
と表す。



$\overrightarrow{AB}$ と $\overrightarrow{GH}$ は、異なるベクトルである。
（成分が、ちがうので）

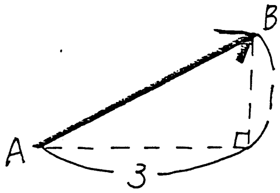


まとめ〈ベクトルの相等〉



上図のように，$\vec{a} = \vec{b}$ のとき，

$$(a_1, a_2) = (b_1, b_2)$$
$$\Longleftrightarrow \quad a_1 = b_1, \quad a_2 = b_2$$



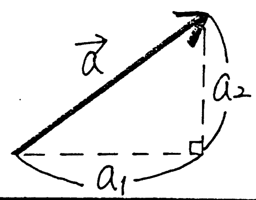
矢印の長さのことをベクトルの大きさという。

$\overrightarrow{AB}$ の大きさを $|\overrightarrow{AB}|$ と表し、“三平方の定理”を利用して、

$$|\overrightarrow{AB}| = \sqrt{3^2 + 1^2}$$
$$= \sqrt{10}$$

と求めることができる。

まとめ〈ベクトルの大きさ〉

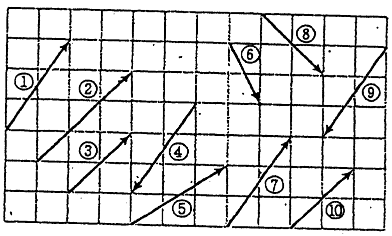


$\vec{a} = (a_1, a_2)$ のとき，

$$|\vec{a}| = \sqrt{(a_1)^2 + (a_2)^2}$$

問1

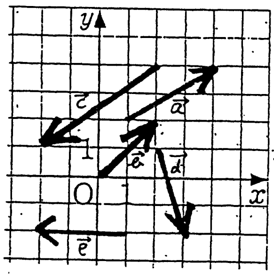
(1)『等しい』ベクトルは、どれとどれか。



(2)『大きさの等しい』ベクトルは、どれとどれか。

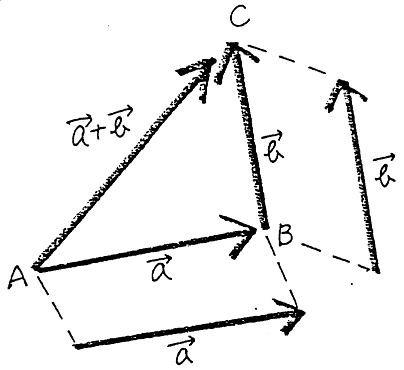
問2

右図のベクトル $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}, \vec{d}, \vec{e}$ を成分で表し、それぞれの大きさを求めなさい。



〈2〉ベクトルの加法

@ AからCに行くためには
(① まずAからBに行って
② それからCに行く。
方法もあります。



〈ベクトルの和〉
$$\boxed{\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{AC}}$$

『しりとり』みたいだね!!

@ 見方を変えると
(① Aから$\vec{a}$の矢印に向かっていき
② そのあと、Bから$\vec{b}$の矢印に行けばCに行ける。

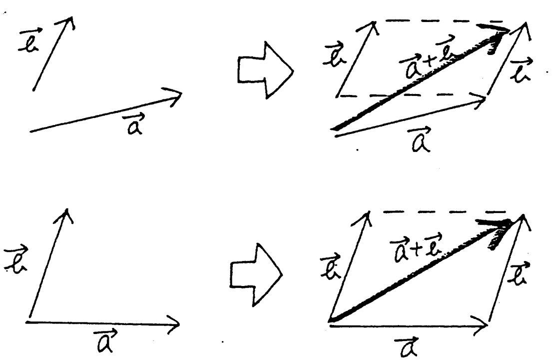
このとき、$\boxed{\overrightarrow{AC}=\vec{a}+\vec{b}}$ と表すこともできる。

ベクトル$\vec{a}$, $\vec{b}$は、平行移動で自分の好きな所に移動できる。

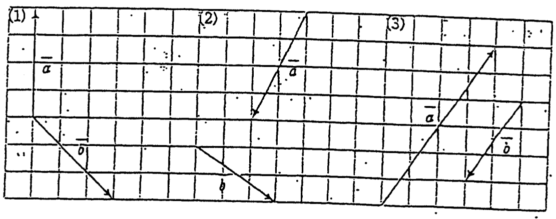
それをもとに、下記の方法で$\vec{a}+\vec{b}$を図示できる。

例　$\vec{a}+\vec{b}$の図示

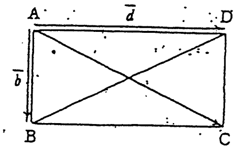
① $\vec{a}$, $\vec{b}$どちらか一方を"平行移動"して、$\vec{a}$の矢印のつづきが$\vec{b}$の矢印になるように、つなげる。
② $\vec{a}$の始まりと$\vec{b}$の終わりを結ぶ。
　　(始点)　　(終点)



問3　次のベクトル$\vec{a}$, $\vec{b}$について、$\vec{a}+\vec{b}$をそれぞれ図示しなさい。

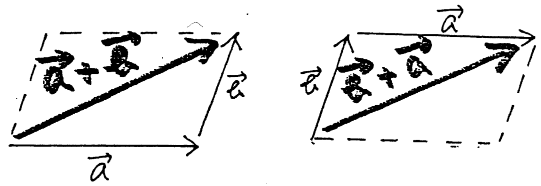


問4

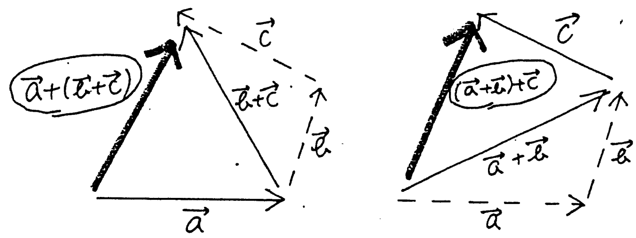


長方形ABCDにおいて、$\overrightarrow{AB}=\vec{b}$, $\overrightarrow{AD}=\vec{d}$とする。
ベクトル$\overrightarrow{AC}$を$\vec{b}$, $\vec{d}$を用いて表しなさい。

@ ベクトルの加法には、次のような交換法則，結合法則が成り立つ。

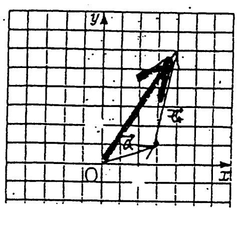


〈交換法則〉 $\vec{a}+\vec{b}=\vec{b}+\vec{a}$



〈結合法則〉
$$(\vec{a}+\vec{b})+\vec{c}=\vec{a}+(\vec{b}+\vec{c})$$

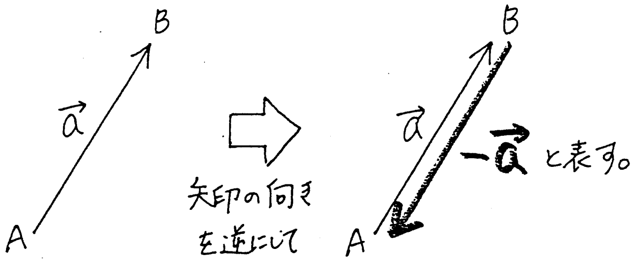
補足



$\vec{a}=(3,1)$, $\vec{b}=(1,5)$のとき

$\vec{a}+\vec{b}=(3,1)+(1,5)$
$=\underline{(4,6)}$

〈3〉逆ベクトル・零ベクトル



$$\boxed{\overrightarrow{BA} = -\overrightarrow{AB} \quad \text{と表す。}}$$

※先頭にマイナスをつけて
　順序を逆にする。

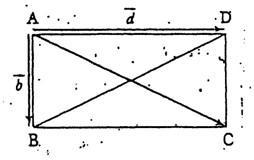
ところで、

$$\vec{a} + (-\vec{a}) = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BA}$$
$$= \overrightarrow{AA}$$
$$= \vec{0} \quad \text{と表す。}$$

↑零ベクトル という。

$$\boxed{\vec{a} + \vec{0} = \vec{0} + \vec{a} = \vec{a}}$$

問5

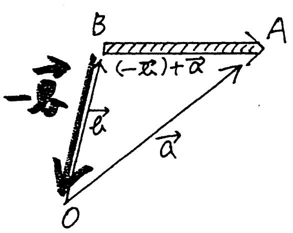


長方形ABCDにおいて、
$\overrightarrow{AB} = \vec{b}$, $\overrightarrow{AD} = \vec{d}$ とする。
次のベクトルを $\vec{b}$, $\vec{d}$ を用いて表しなさい。

(1) $\overrightarrow{DA}$　　(2) $\overrightarrow{CB}$　　(3) $\overrightarrow{CD}$

〈4〉ベクトルの減法

ルール　$\vec{a} - \vec{b} = \vec{a} + (-\vec{b})$ と決める。



すなわち

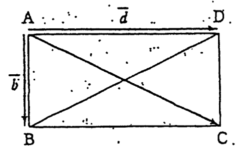
$$(-\vec{b}) + \vec{a} = \overrightarrow{BO} + \overrightarrow{OA}$$
$$= \overrightarrow{BA}$$

先頭同じ

$$\boxed{\overrightarrow{BA} = \overrightarrow{OA} - \overrightarrow{OB}}$$

順序が逆になる。

問6



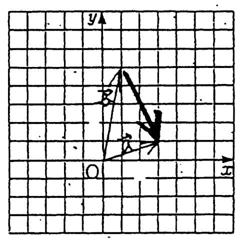
長方形ABCDにおいて、
$\overrightarrow{AB} = \vec{b}$, $\overrightarrow{AD} = \vec{d}$ とする。
次のベクトルを $\vec{b}$, $\vec{d}$ を用いて表しなさい。

(1) $\overrightarrow{BD}$　　(2) $\overrightarrow{DB}$

問7

平行四辺形ABCDの対角線の交点をOとし、$\overrightarrow{OA} = \vec{a}$, $\overrightarrow{OB} = \vec{b}$ とするとき、ベクトル $\overrightarrow{OC}$, $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{BC}$ を $\vec{a}$, $\vec{b}$ を用いて表しなさい。

補足



$\vec{a} = (3, 1)$, $\vec{b} = (1, 5)$
のとき、

$$\vec{a} - \vec{b} = \vec{a} + (-\vec{b})$$
$$= (3,1) + (-1,-5)$$
$$= \underline{(2, -4)}$$

例1

2点 A(3, −1), B(−1, −4) について.

$\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA}$ ➡「ひき算」に直す。

$= (-1, -4) - (3, -1)$ ➡ 分配法則を利用して「逆ベクトル」に直す。

$= (-1, -4) + (-3, 1)$

$= \underline{(-4, -3)}$

$|\overrightarrow{AB}| = \sqrt{(-4)^2 + (-3)^2}$ ➡「三平方の定理」の応用。テキスト(P1)参照。

$= \sqrt{25} = \underline{5}$

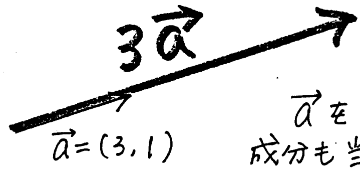
問8

4点 O(0, 0), A(4, 0), B(3, 5), C(−2, −5) について、次のベクトルの成分と大きさを求めなさい。

(1) $\overrightarrow{OB}$ (2) $\overrightarrow{AB}$

(3) $\overrightarrow{BC}$ (4) $\overrightarrow{CA}$

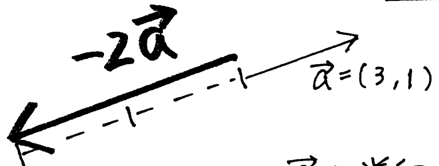
〈5〉ベクトルの実数倍



$\vec{a}$ を3倍に伸ばしたら、成分も当然、3倍になります。

$3\vec{a} = 3(3, 1)$

$= \underline{(9, 3)}$



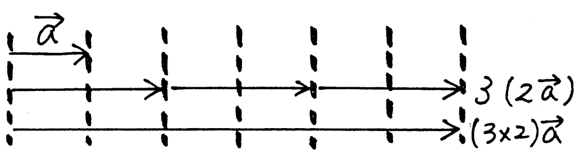
$\vec{a}$ を逆向きに2倍したら…

$-2\vec{a} = -2(3, 1)$

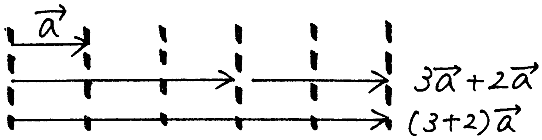
$= \underline{(-6, -2)}$

@ 実数倍の性質を、図で確かめてみましょう。

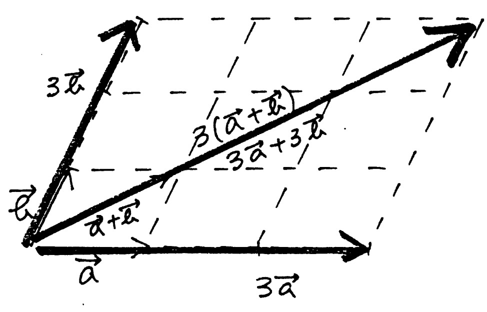
(1) $3(2\vec{a}) = (3\times2)\vec{a} = 6\vec{a}$



(2) $3\vec{a} + 2\vec{a} = (3+2)\vec{a} = 5\vec{a}$



(3) $3(\vec{a} + \vec{b}) = 3\vec{a} + 3\vec{b}$



$\vec{a}$, $\vec{b}$ を文字 a, b と同じように考えて計算できる!!

例2

$3(2\vec{a}+\vec{b})+2(-\vec{a}+4\vec{b})$
$=6\vec{a}+3\vec{b}-2\vec{a}+8\vec{b}$
$=\underline{4\vec{a}+11\vec{b}}$

問9

次の式を簡単にしなさい。

(1) $(2\vec{a}-3\vec{b})+(3\vec{a}+4\vec{b})$

(2) $2(-\vec{a}+2\vec{b})-4(\vec{a}-3\vec{b})+3\vec{a}$

問10

次の等式を満たすベクトル$\vec{x}$を、$\vec{a}$, $\vec{b}$を用いて表しなさい。

(1) $2\vec{x}-3\vec{a}=6\vec{b}-\vec{x}$

(2) $\vec{x}+\vec{a}-3\vec{b}=2(\vec{x}-2\vec{a}-3\vec{b})$

例3

$\vec{a}=(1,-2)$, $\vec{b}=(-1,-3)$のとき、

$2\vec{a}-3\vec{b}$

$=2(1,-2)-3(-1,-3)$ ➡ ベクトルの実数倍

$=(2,-4)+(3,9)$ ➡ 成分の和

$=\underline{(5,5)}$

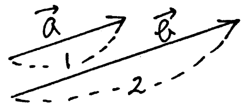
問11

$\vec{a}=(2,1)$, $\vec{b}=(-2,3)$のとき、次のベクトルを成分で表しなさい。

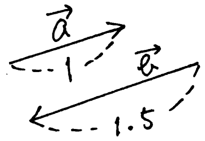
(1) $\vec{a}+\vec{b}$　　(2) $\vec{a}-\vec{b}$

(3) $4\vec{a}$　　(4) $3\vec{a}-2\vec{b}$

〈6〉ベクトルの平行



➡ $\vec{b}=2\vec{a}$



➡ $\vec{b}=-1.5\vec{a}$

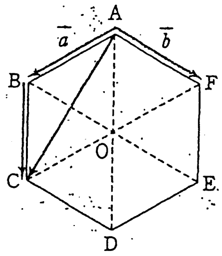
◎ 上図のように、『同じ向き』『反対向き』の2つのベクトルを平行という。

◎ 一方が他方の実数倍になっていることがポイント!!

<ベクトルの平行>

$\vec{a} \parallel \vec{b} \iff \vec{b}=k\vec{a}$ と表せる。

問12



正六角形ABCDEF において、$\overrightarrow{AB}=\vec{a}$, $\overrightarrow{AF}=\vec{b}$ とするとき、次のベクトルを $\vec{a}$, $\vec{b}$ を用いて表しなさい。

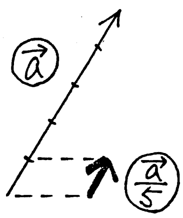
(1) $\overrightarrow{FC}$　　(2) $\overrightarrow{EB}$

(3) $\overrightarrow{BC}$　　(4) $\overrightarrow{AC}$

(5) $\overrightarrow{AD}$　　(6) $\overrightarrow{CE}$

(7) $\overrightarrow{AE}$

〈7〉単位ベクトル



$\vec{a}=(3,4)$ とする。

大きさ $|\vec{a}|=\sqrt{3^2+4^2}=\sqrt{25}=5$

よって、

5等分すれば『大きさ1』になる。

⇩

$\frac{\vec{a}}{5}$ ➡ これを単位ベクトルという。

$\vec{a}$ と同じ向きの単位ベクトルは

$$\frac{\vec{a}}{|\vec{a}|}$$

"長さ"で割れば単位ベクトルになる。

(※ 逆向きのときは $-\frac{\vec{a}}{|\vec{a}|}$)

問13

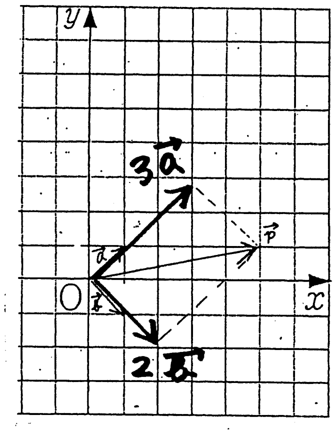
$|\vec{a}|=2$ のとき、$\vec{a}$ と平行な単位ベクトルを求めなさい。(2つあるよ!!)

〈8〉応用問題

例4

$\vec{a}=(1,1)$, $\vec{b}=(1,-1)$ のとき、$\vec{p}=(5,1)$ を $s\vec{a}+t\vec{b}$ の形に表しなさい。

解



$\vec{p}=s\vec{a}+t\vec{b}$ とおく。

$(5,1)=s(1,1)+t(1,-1)$

$=(s+t\ ,\ s-t)$

よって、

$$\begin{cases} s+t=5 & \cdots ① \\ s-t=1 & \cdots ② \end{cases}$$

①, ② より $s=3, t=2$

ゆえに、 $\vec{p}=3\vec{a}+2\vec{b}$

問14

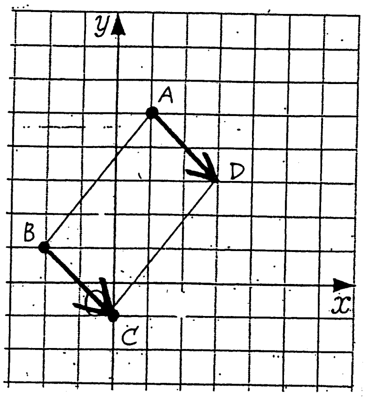
$\vec{a}=(1,2)$, $\vec{b}=(-1,1)$ とする。次のベクトルを $\vec{a}$, $\vec{b}$ を用いて表しなさい。

(1) $\vec{p}=(5,4)$　　(2) $\vec{q}=(4,-1)$

例5

4点A(1, 5), B(−2, 1), C(0, −1), Dを頂点とする平行四辺形ABCDがある。頂点Dの座標を求めなさい。

解



D(x, y)とおく。

□ABCD より

$\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{BC}$ …①

となればよい。

$\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{OD} - \overrightarrow{OA}$

$= (x, y) - (1, 5)$

$= (x-1, y-5)$

$\overrightarrow{BC} = \overrightarrow{OC} - \overrightarrow{OB}$

$= (0, -1) - (-2, 1)$

$= (2, -2)$

① より $(x-1, y-5) = (2, -2)$

$\begin{cases} x-1=2 \\ y-5=-2 \end{cases}$ $\therefore x=3,\ y=3$

よって D(3, 3)

問15

上の例5 の3点A, B, Cに対して、四角形ABECが平行四辺形になるような点Eの座標を求めなさい。

〈9〉補充問題

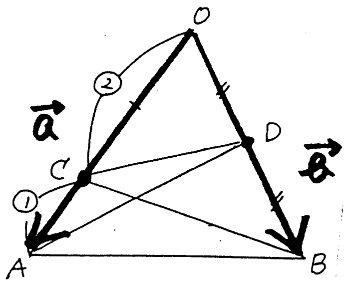
1

△OABにおいて、OAを2:1に内分する点をC，OBの中点をDとする。$\overrightarrow{OA} = \vec{a}$，$\overrightarrow{OB} = \vec{b}$として、次のベクトルを$\vec{a}$，$\vec{b}$を用いて表しなさい。

(1) $\overrightarrow{AD}$

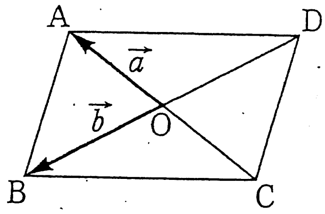
(2) $\overrightarrow{BC}$

(3) $\overrightarrow{DC}$



2

平行四辺形ABCDの対角線の交点をOとし、$\overrightarrow{OA} = \vec{a}$，$\overrightarrow{OB} = \vec{b}$とする。次のベクトルを$\vec{a}$，$\vec{b}$を用いて表しなさい。



(1) $\overrightarrow{AB}$

(2) $\overrightarrow{BC}$

(3) $\overrightarrow{BD}$

(4) $\overrightarrow{CD} - \overrightarrow{AD}$

3

次の問いに答えなさい。

(1) $\overrightarrow{OA} = 2\vec{a}$，$\overrightarrow{OB} = 3\vec{b}$，$\overrightarrow{OP} = 6\vec{b} - 4\vec{a}$ のとき、$\overrightarrow{OP} \parallel \overrightarrow{AB}$ であることを示しなさい。

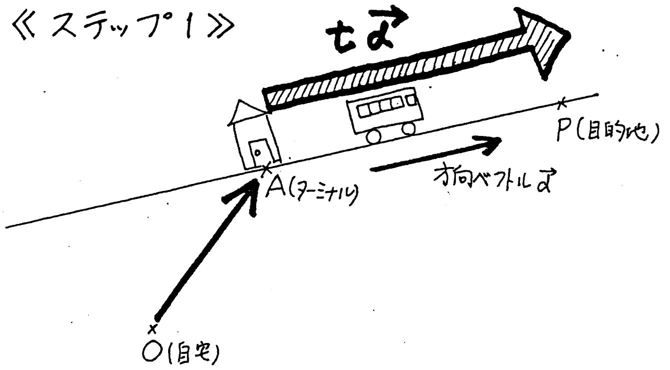
(2) $\overrightarrow{OA} = \vec{a}$，$\overrightarrow{OB} = \vec{b}$，$\overrightarrow{OP} = 3\vec{a} - 2\vec{b}$，$\overrightarrow{OQ} = 3\vec{a}$ のとき、$\overrightarrow{PQ} \parallel \overrightarrow{OB}$ であることを示しなさい。

「平面ベクトル」テキスト（Part2）

〈1〉直線のベクトル方程式

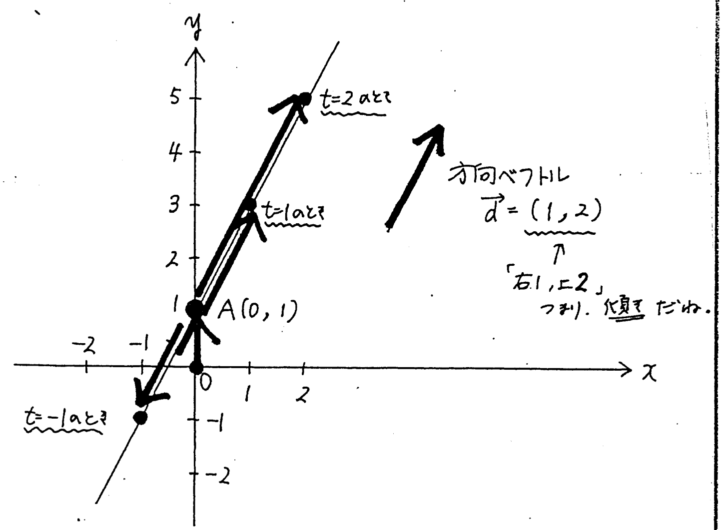
目的地に行くためには、 ターミナルに行って、バスに乗れ！

《ステップ1》



公式　Part1 $\overrightarrow{OP}=\overrightarrow{OA}+t\vec{d}$　と表せる。

例1　$y=2x+1$ のグラフ上の点P を"ベクトル的"に表現すると…



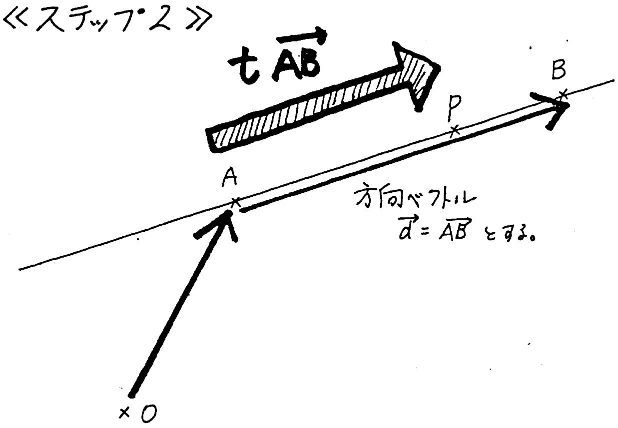
直線上の点をPとすると、

$$\overrightarrow{OP}=\overrightarrow{OA}+t\vec{d}$$

$$=(0,1)+t(1,2)=(t,\ 1+2t)$$

（$t=1$ のとき ⇨ P(1, 3)　　$t=-1$ のとき ⇨ P(-1,-1)
　$t=2$ のとき ⇨ P(2, 5)）

《ステップ2》

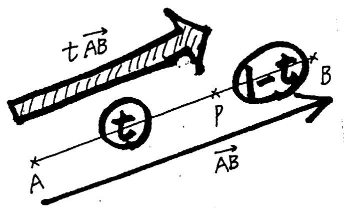


$$\overrightarrow{OP}=\overrightarrow{OA}+t\overrightarrow{AB}$$

$$=\overrightarrow{OA}+t(\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{OA})$$

$$=(1-t)\overrightarrow{OA}+t\overrightarrow{OB}$$

公式　Part2 $\overrightarrow{OP}=(1-t)\overrightarrow{OA}+t\overrightarrow{OB}$　と表せる。



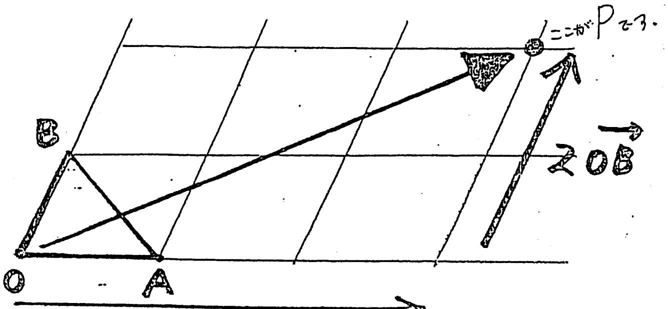
これは
「内分の公式」
と見ることもできるね。

（補足　ちなみに、これを
$\overrightarrow{AP}=t\overrightarrow{AB}$
と表しても同様である。
$\overrightarrow{OP}-\overrightarrow{OA}=t(\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{OA})$
$\therefore\ \overrightarrow{OP}=(1-t)\overrightarrow{OA}+t\overrightarrow{OB}$ ）

〈2〉点の存在範囲

$\overrightarrow{OP} = s\overrightarrow{OA} + t\overrightarrow{OB}$ で表される点Pの存在範囲は、斜交座標系を利用せよ!!

例2　$\overrightarrow{OP} = 3\overrightarrow{OA} + 2\overrightarrow{OB}$ のとき。



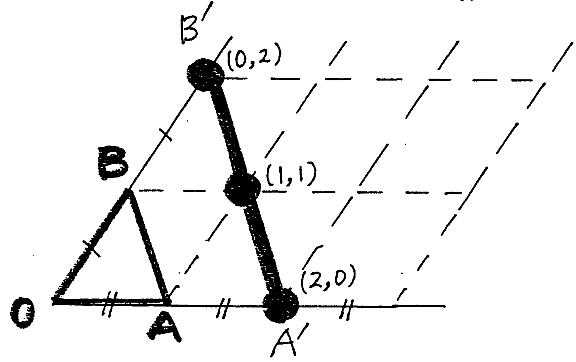
例3

$\triangle OAB$ に対し、$\overrightarrow{OP} = s\overrightarrow{OA} + t\overrightarrow{OB}$ (s, t は実数)とする。s, t が次の条件を満たしながら変化するとき、点Pの描く図形を図示しなさい。

(1) $s + t = 2$, $s \geqq 0$, $t \geqq 0$

(2) $s + t \leqq 2$, $s \geqq 0$, $t \geqq 0$

解 (1) $(s, t) = (0, 2), (1, 1), (2, 0)$ などが当てはまる。

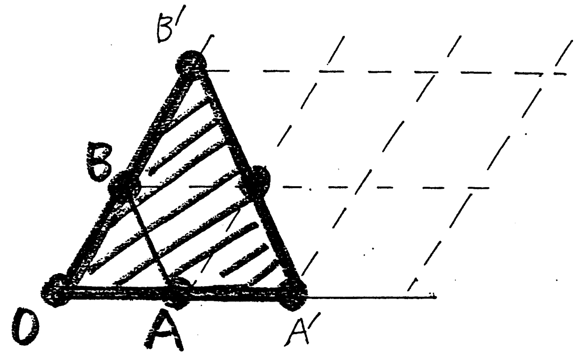


したがって、点Pの存在範囲は、

線分 $A'B'$ である。(両端含む)

(ただし、$OA' = 2OA$, $OB' = 2OB$)

(2) $(s, t) = (0, 2), (1, 1), (2, 0)$
$(0, 0), (1, 0), (0, 1)$
など。



したがって、点Pの存在範囲は、

$\triangle OA'B'$ の内部 (境界含む)

(ただし、$OA' = 2OA$, $OB' = 2OB$)

問1

$\triangle OAB$ に対し、$\overrightarrow{OP} = s\overrightarrow{OA} + t\overrightarrow{OB}$ (s, t は実数)とする。s, t が次の条件を満たしながら変化するとき、点Pの描く図形を図示しなさい。

(1) $s + t = 1$

(2) $2s + t = 1$, $s \geqq 0$, $t \geqq 0$

(3) $2s + 3t \leqq 6$, $s \geqq 0$, $t \geqq 0$