平面ベクトルの導入について

北海道紋別北高等学校　三上敬揮

１．ベクトルの導入にあたって

ベクトルを、「成分」を主役にして導入する方法を、２年間実践してみました。すると、「内積」の手前までを３時間程度で紹介でき、ベクトルの全体像を短時間で生徒に提示できました。数学 B は２単位科目であり、教科書どおりに指導すると、興味深い題材にたどり着くのにかなりの期間を要します。

まず、ベクトルの全体的な概念をコンパクトに消化することにより、ベクトルの面白さを伝える一つの方法となると考えました。

基本ベクトルなどの細かい部分は省略した授業案になりますが、この授業の目的として、

① 短時間で、重要なテーマにたどりつく
② とりあえずベクトルの全体像をつかむことで、この分野への興味を喚起し、より詳細へ突入する意欲を掘り起こす

ことを意図しています。

２.「平面ベクトル」テキストの構成について

次の２分野に分けています。

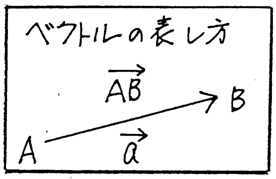
・テキスト（Part1）→「ベクトルの導入」から「内積の直前」まで
・テキスト（Part2）→「直線のベクトル方程式」および「点の存在範囲」

他の分野については、まだ作成中です。今後、追加していきたいと考えています。

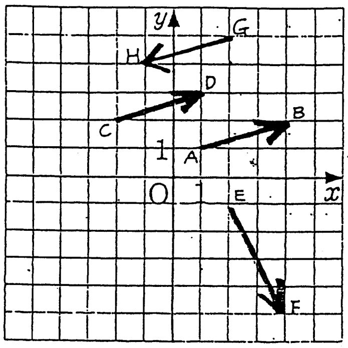
「平面ベクトル」テキスト（Part 1）

〈1〉 ベクトル

位置は問題にしないで、「向き」と「大きさ」だけに着目したものをベクトルという。



右図のように、矢印を $\overrightarrow{AB}$ とか $\vec{a}$ と表す。



ベクトルを成分で表そう。

$\overrightarrow{AB}=(\ \_\_\_\ ,\ \_\_\_\ )$

x軸方向　y軸方向

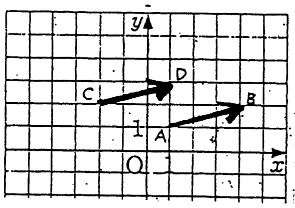
$\overrightarrow{CD}=(\quad ,\quad)$

$\overrightarrow{EF}=(\quad ,\quad)$

成分が同じベクトルは等しい。例えば、右図のとき

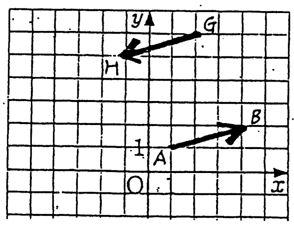
$\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{CD}$

と表す。

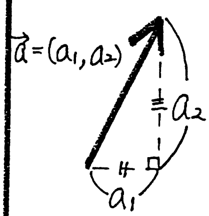


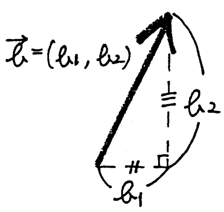
$\overrightarrow{AB}$ と $\overrightarrow{GH}$ は、異なるベクトルである。

（成分が、ちがうので）



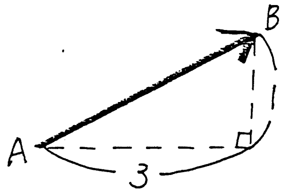
まとめ〈ベクトルの相等〉





上図のように、$\vec{a}=\vec{b}$ のとき、

$$(a_1\ ,\ a_2)=(b_1\ ,\ b_2)$$
$$\Longleftrightarrow\ a_1=b_1\ ,\ a_2=b_2$$



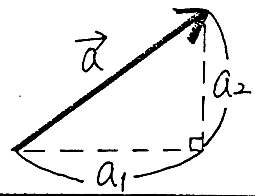
矢印の長さのことをベクトルの大きさという。

$\overrightarrow{AB}$ の大きさを $|\overrightarrow{AB}|$ と表し、"三平方の定理"を利用して、

$$|\overrightarrow{AB}|=\sqrt{3^2+1^2}$$
$$=\sqrt{10}$$

と求めることができる。

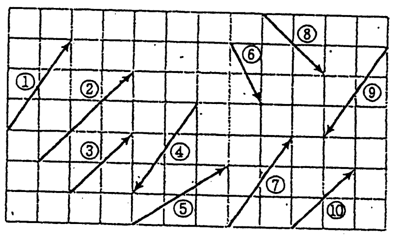
まとめ〈ベクトルの大きさ〉



$\vec{a}=(a_1\ ,\ a_2)$ のとき、

$$|\vec{a}|=\sqrt{(a_1)^2+(a_2)^2}$$

問1

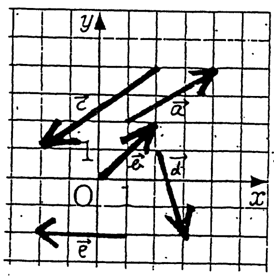


(1)『等しい』ベクトルは、どれとどれか。

(2)『大きさの等しい』ベクトルは、どれとどれか。

問2

右図のベクトル $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$, $\vec{d}$, $\vec{e}$ を成分で表し、それぞれの大きさを求めなさい。



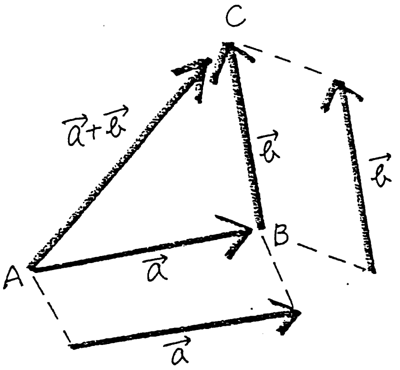
〈2〉ベクトルの加法

@ AからCに行くためには

① まずAからBに行って

② それからCに行く。

方法もあります。



〈ベクトルの和〉
$\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{AC}$

『しりとり』みたいだね!!

@ 見方を変えると

① Aから$\vec{a}$の矢印に向かっていき

② そのあと、Bから$\vec{b}$の矢印に行けばCに行ける。

このとき $\boxed{\overrightarrow{AC}=\vec{a}+\vec{b}}$ と表すこともできる。

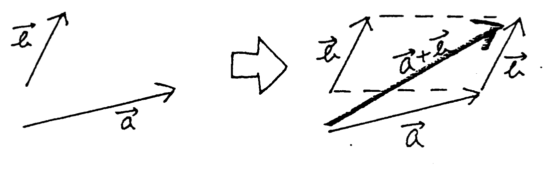
ベクトル$\vec{a}$，$\vec{b}$は、平行移動で自分の好きな所に移動できる。

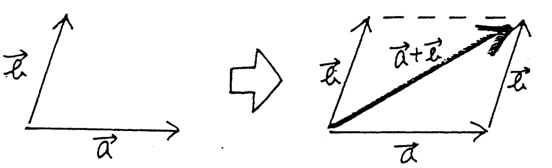
それをもとに、下記の方法で$\vec{a}+\vec{b}$を図示できる。

例　$\vec{a}+\vec{b}$の図示

① $\vec{a}$，$\vec{b}$どちらか一方を“平行移動”して、$\vec{a}$の矢印のつづきが$\vec{b}$の矢印になるように、つなげる。

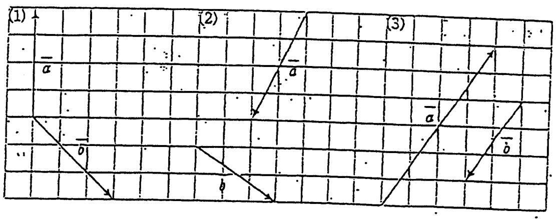
② $\vec{a}$の始まりと$\vec{b}$の終わりを結ぶ。
　　(始点)　　　(終点)



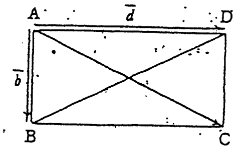


問3

次のベクトル$\vec{a}$，$\vec{b}$について、$\vec{a}+\vec{b}$をそれぞれ図示しなさい。

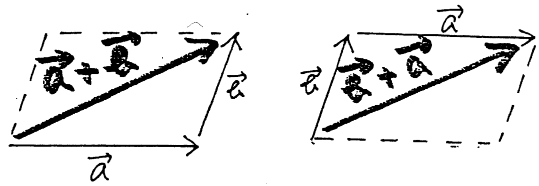


問4

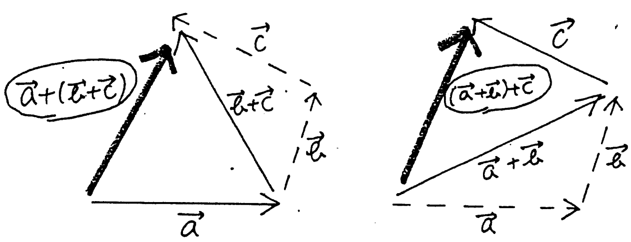


長方形ABCDにおいて、$\overrightarrow{AB}=\vec{b}$，$\overrightarrow{AD}=\vec{d}$とする。
ベクトル$\overrightarrow{AC}$を$\vec{b}$，$\vec{d}$を用いて表しなさい。

@ ベクトルの加法には、次のような交換法則，結合法則が成り立つ。

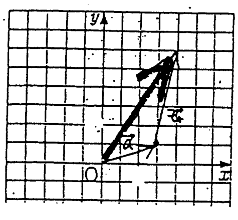


〈交換法則〉　$\vec{a}+\vec{b}=\vec{b}+\vec{a}$



〈結合法則〉
$(\vec{a}+\vec{b})+\vec{c}=\vec{a}+(\vec{b}+\vec{c})$

補足

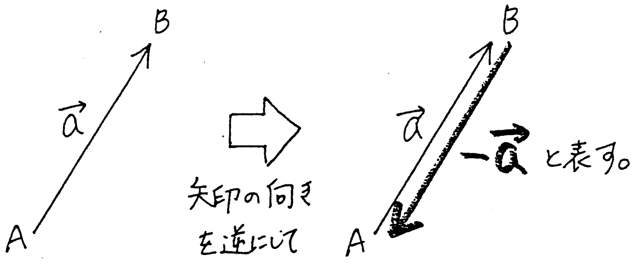


$\vec{a}=(3,1)$，$\vec{b}=(1,5)$ のとき

$\vec{a}+\vec{b}=(3,1)+(1,5)$

$=\underline{(4,6)}$

〈3〉逆ベクトル・零ベクトル



$\boxed{\overrightarrow{BA} = -\overrightarrow{AB}}$ と表す。

※先頭にマイナスをつけて順序を逆にする。

ところで，

$\vec{a} + (-\vec{a}) = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BA}$

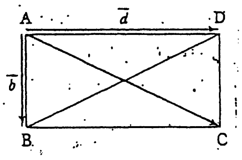
$= \overrightarrow{AA}$

$= \vec{0}$ と表す。

零ベクトル という。

$\boxed{\vec{a} + \vec{0} = \vec{0} + \vec{a} = \vec{a}}$

問5

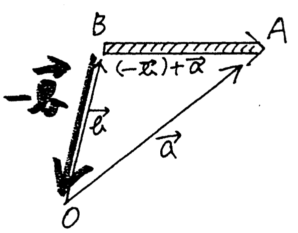


長方形ABCDにおいて，
$\overrightarrow{AB} = \vec{b}$，$\overrightarrow{AD} = \vec{d}$ とする。
次のベクトルを $\vec{b}$，$\vec{d}$ を用いて表しなさい。

(1) $\overrightarrow{DA}$　　(2) $\overrightarrow{CB}$　　(3) $\overrightarrow{CD}$

〈4〉ベクトルの減法

ルール　$\vec{a} - \vec{b} = \vec{a} + (-\vec{b})$ と決める。



すなわち

$(-\vec{b}) + \vec{a} = \overrightarrow{BO} + \overrightarrow{OA}$

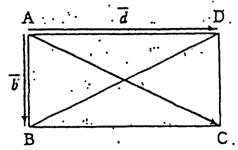
$= \overrightarrow{BA}$

$\boxed{\overrightarrow{BA} = \overrightarrow{OA} - \overrightarrow{OB}}$

先頭同じ

順序が逆になる。

問6



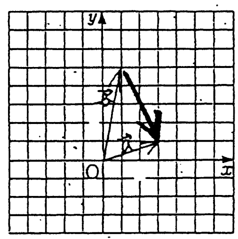
長方形ABCDにおいて，
$\overrightarrow{AB} = \vec{b}$，$\overrightarrow{AD} = \vec{d}$ とする。
次のベクトルを $\vec{b}$，$\vec{d}$ を用いて表しなさい。

(1) $\overrightarrow{BD}$　　(2) $\overrightarrow{DB}$

問7

平行四辺形ABCDの対角線の交点をOとし，$\overrightarrow{OA} = \vec{a}$，$\overrightarrow{OB} = \vec{b}$ とするとき，ベクトル $\overrightarrow{OC}$，$\overrightarrow{AB}$，$\overrightarrow{BC}$ を $\vec{a}$，$\vec{b}$ を用いて表しなさい。

補足



$\vec{a} = (3, 1)$，$\vec{b} = (1, 5)$ のとき，

$\vec{a} - \vec{b} = \vec{a} + (-\vec{b})$

$= (3, 1) + (-1, -5)$

$= \underline{(2, -4)}$

例1

2点 $A(3,-1)$, $B(-1,-4)$ について.

$$\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA}$$

➡「ひき算」に直す。

$$= (-1,-4) - (3,-1)$$

➡ 分配法則を利用して「逆ベクトル」に直す。

$$= (-1,-4) + (-3,1)$$

$$= \underline{(-4,-3)}$$

$$|\overrightarrow{AB}| = \sqrt{(-4)^2+(-3)^2}$$

➡「三平方の定理」の応用。テキスト(P1)参照。

$$= \sqrt{25} = \underline{5}$$

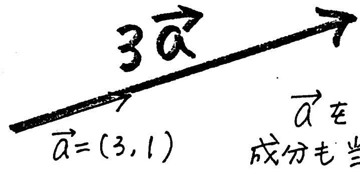
問8

4点 $O(0,0)$, $A(4,0)$, $B(3,5)$, $C(-2,-5)$ について、次のベクトルの成分と大きさを求めなさい。

(1) $\overrightarrow{OB}$　　(2) $\overrightarrow{AB}$

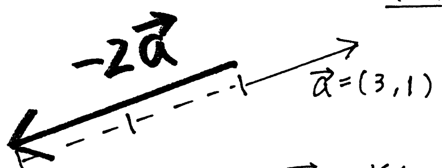
(3) $\overrightarrow{BC}$　　(4) $\overrightarrow{CA}$

〈5〉ベクトルの実数倍



$\vec{a}$ を3倍に伸ばしたら、成分も当然、3倍になります。

$$3\vec{a} = 3(3,1)$$
$$= \underline{(9,3)}$$

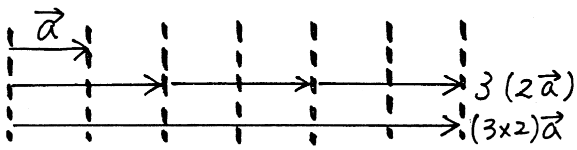


$\vec{a}$ を逆向きに2倍したら…

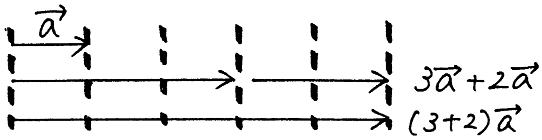
$$-2\vec{a} = -2(3,1)$$
$$= \underline{(-6,-2)}$$

@ 実数倍の性質を、図で確かめてみましょう。

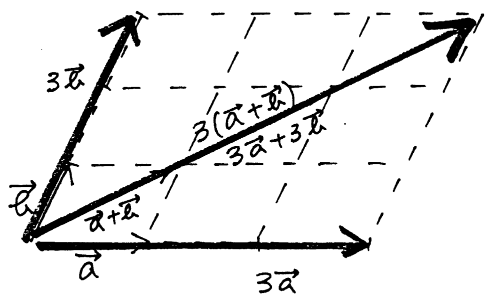
(1) $3(2\vec{a}) = (3\times2)\vec{a} = 6\vec{a}$



(2) $3\vec{a}+2\vec{a} = (3+2)\vec{a} = 5\vec{a}$



(3) $3(\vec{a}+\vec{b}) = 3\vec{a}+3\vec{b}$



$\vec{a}$, $\vec{b}$ を文字 a, b と同じように考えて計算できる!!

例2

$3(2\vec{a}+\vec{b})+2(-\vec{a}+4\vec{b})$
$=6\vec{a}+3\vec{b}-2\vec{a}+8\vec{b}$
$=\underline{4\vec{a}+11\vec{b}}$ //

問9

次の式を簡単にしなさい。

(1) $(2\vec{a}-3\vec{b})+(3\vec{a}+4\vec{b})$

(2) $2(-\vec{a}+2\vec{b})-4(\vec{a}-3\vec{b})+3\vec{a}$

問10

次の等式を満たすベクトル$\vec{x}$を、$\vec{a}$, $\vec{b}$を用いて表しなさい。

(1) $2\vec{x}-3\vec{a}=6\vec{b}-\vec{x}$

(2) $\vec{x}+\vec{a}-3\vec{b}=2(\vec{x}-2\vec{a}-3\vec{b})$

例3

$\vec{a}=(1,-2)$, $\vec{b}=(-1,-3)$ のとき.

$2\vec{a}-3\vec{b}$

$=2(1,-2)-3(-1,-3)$ ➡ ベクトルの実数倍

$=(2,-4)+(3,9)$ ➡ 成分の和

$=\underline{(5,5)}$ //

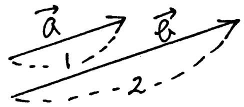
問11

$\vec{a}=(2,1)$, $\vec{b}=(-2,3)$ のとき、次のベクトルを成分で表しなさい。

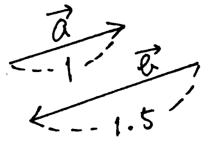
(1) $\vec{a}+\vec{b}$　　(2) $\vec{a}-\vec{b}$

(3) $4\vec{a}$　　(4) $3\vec{a}-2\vec{b}$

〈6〉ベクトルの平行



➡ $\vec{b}=2\vec{a}$



➡ $\vec{b}=-1.5\vec{a}$

◎ 上図のように、『同じ向き』『反対向き』の２つのベクトルを平行という。

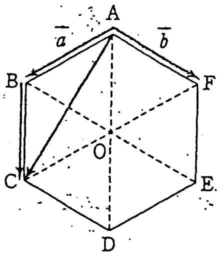
◎ 一方が他方の実数倍になっていることがポイント!!

<ベクトルの平行>

$\vec{a} \parallel \vec{b} \iff \vec{b}=k\vec{a}$ と表せる。

問12

正六角形ABCDEFにおいて、$\overrightarrow{AB}=\vec{a}$, $\overrightarrow{AF}=\vec{b}$ とするとき、次のベクトルを $\vec{a}$, $\vec{b}$ を用いて表しなさい。



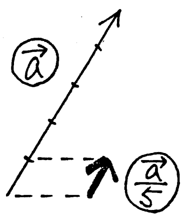
(1) $\overrightarrow{FC}$　　(2) $\overrightarrow{EB}$

(3) $\overrightarrow{BC}$　　(4) $\overrightarrow{AC}$

(5) $\overrightarrow{AD}$　　(6) $\overrightarrow{CE}$

(7) $\overrightarrow{AE}$

〈7〉単位ベクトル



$\vec{a}=(3,4)$ とする。

大きさ $|\vec{a}|=\sqrt{3^2+4^2}=\sqrt{25}=5$

よって、

5等分すれば
『大きさ1』になる。

⇩

$\frac{\vec{a}}{5}$ ➡ これを単位ベクトルという。

$\vec{a}$ と同じ向きの単位ベクトルは

$$\frac{\vec{a}}{|\vec{a}|}$$ ← "長さ"で割れば単位ベクトルになる。

(※ 逆向きのときは $-\frac{\vec{a}}{|\vec{a}|}$)

問13

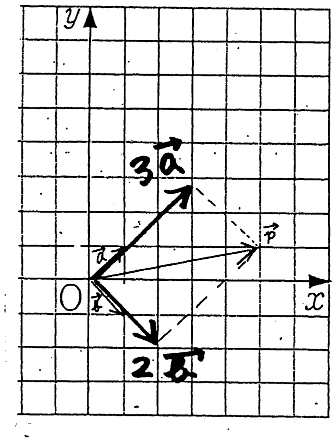
$|\vec{a}|=2$ のとき、$\vec{a}$ と平行な単位ベクトルを求めなさい。(2つあるよ!!)

〈8〉応用問題

例4

$\vec{a}=(1,1)$, $\vec{b}=(1,-1)$ のとき、$\vec{p}=(5,1)$ を $s\vec{a}+t\vec{b}$ の形に表しなさい。

解



$\vec{p}=s\vec{a}+t\vec{b}$ とおく。

$(5,1)=s(1,1)+t(1,-1)$

$=(s+t,\ s-t)$

よって、

$$\begin{cases} s+t=5 & \cdots① \\ s-t=1 & \cdots② \end{cases}$$

①, ②より $s=3$, $t=2$

ゆえに、$\underline{\vec{p}=3\vec{a}+2\vec{b}}$

問14

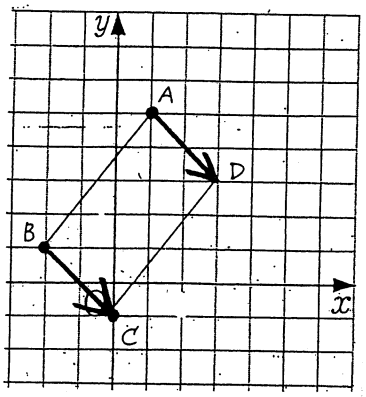
$\vec{a}=(1,2)$, $\vec{b}=(-1,1)$ とする。次のベクトルを $\vec{a}$, $\vec{b}$ を用いて表しなさい。

(1) $\vec{p}=(5,4)$　　(2) $\vec{q}=(4,-1)$

例5

4点 A(1, 5), B(−2, 1), C(0, −1), Dを頂点とする平行四辺形ABCDがある。頂点Dの座標を求めなさい。

解



D(x, y) とおく。

□ABCD より

$\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{BC}$ …①

となればよい。

$\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{OD} - \overrightarrow{OA}$

$= (x, y) - (1, 5)$

$= (x-1, y-5)$

$\overrightarrow{BC} = \overrightarrow{OC} - \overrightarrow{OB}$

$= (0, -1) - (-2, 1)$

$= (2, -2)$

① より $(x-1, y-5) = (2, -2)$

$\begin{cases} x-1=2 \\ y-5=-2 \end{cases}$ $\therefore x=3,\ y=3$

よって $\underline{D(3, 3)}$ //

問15

上の例5 の3点 A, B, C に対して、四角形ABEC が平行四辺形になるような点E の座標を求めなさい。

〈9〉補充問題

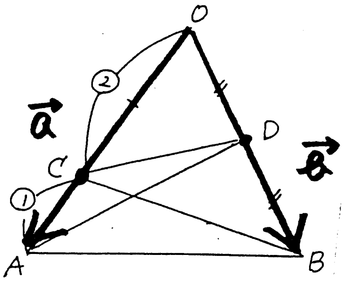
1

△OABにおいて、OAを2:1に内分する点をC、OBの中点をDとする。$\overrightarrow{OA} = \vec{a}$, $\overrightarrow{OB} = \vec{b}$ として、次のベクトルを $\vec{a}$, $\vec{b}$ を用いて表しなさい。

(1) $\overrightarrow{AD}$

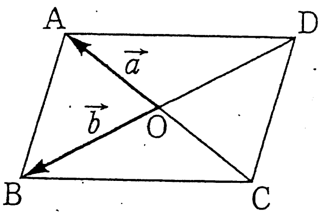
(2) $\overrightarrow{BC}$

(3) $\overrightarrow{DC}$



2

平行四辺形ABCD の対角線の交点をOとし、$\overrightarrow{OA} = \vec{a}$, $\overrightarrow{OB} = \vec{b}$ とする。次のベクトルを $\vec{a}$, $\vec{b}$ を用いて表しなさい。



(1) $\overrightarrow{AB}$

(2) $\overrightarrow{BC}$

(3) $\overrightarrow{BD}$

(4) $\overrightarrow{CD} - \overrightarrow{AD}$

3

次の問いに答えなさい。

(1) $\overrightarrow{OA} = 2\vec{a}$, $\overrightarrow{OB} = 3\vec{b}$, $\overrightarrow{OP} = 6\vec{b} - 4\vec{a}$ のとき、$\overrightarrow{OP} \parallel \overrightarrow{AB}$ であることを示しなさい。

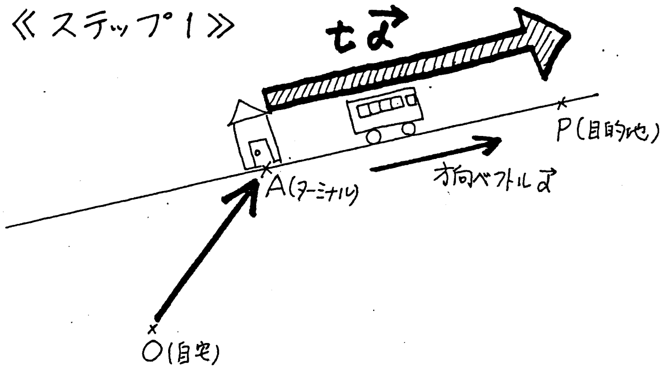
(2) $\overrightarrow{OA} = \vec{a}$, $\overrightarrow{OB} = \vec{b}$, $\overrightarrow{OP} = 3\vec{a} - 2\vec{b}$, $\overrightarrow{OQ} = 3\vec{a}$ のとき、$\overrightarrow{PQ} \parallel \overrightarrow{OB}$ であることを示しなさい。

「平面ベクトル」テキスト（Part 2）

〈1〉直線のベクトル方程式

> 目的地に行くためには、
> ターミナルに行って、バスに乗れ！

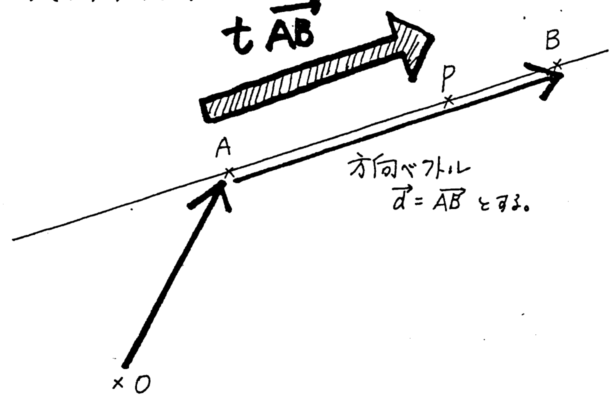
《ステップ1》



公式 Part 1

$$\overrightarrow{OP} = \overrightarrow{OA} + t\vec{d}$$ と表せる。

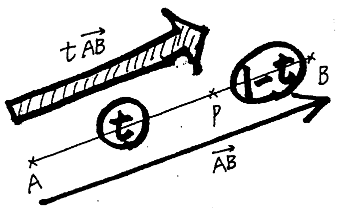
《ステップ2》



$$\begin{aligned}\overrightarrow{OP} &= \overrightarrow{OA} + t\overrightarrow{AB} \\ &= \overrightarrow{OA} + t(\overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA}) \\ &= (1-t)\overrightarrow{OA} + t\overrightarrow{OB}\end{aligned}$$

公式 Part 2

$$\overrightarrow{OP} = (1-t)\overrightarrow{OA} + t\overrightarrow{OB}$$ と表せる。



これは
「内分の公式」
と見ることもできるね。

（**補足** ちなみに、これを

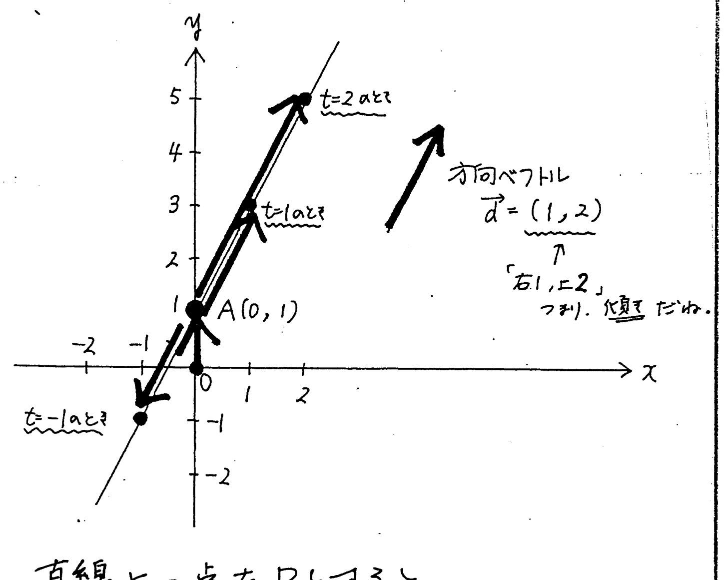
$$\overrightarrow{AP} = t\overrightarrow{AB}$$

と表しても同様である。

$$\overrightarrow{OP} - \overrightarrow{OA} = t(\overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA})$$

$$\therefore\ \overrightarrow{OP} = (1-t)\overrightarrow{OA} + t\overrightarrow{OB}$$ ）

例1 $y = 2x+1$ のグラフ上の点P
を"ベクトル的"に表現すると…



直線上の点をPとすると、

$$\begin{aligned}\overrightarrow{OP} &= \overrightarrow{OA} + t\vec{d} \\ &= (0, 1) + t(1, 2) = (t,\ 1+2t)\end{aligned}$$

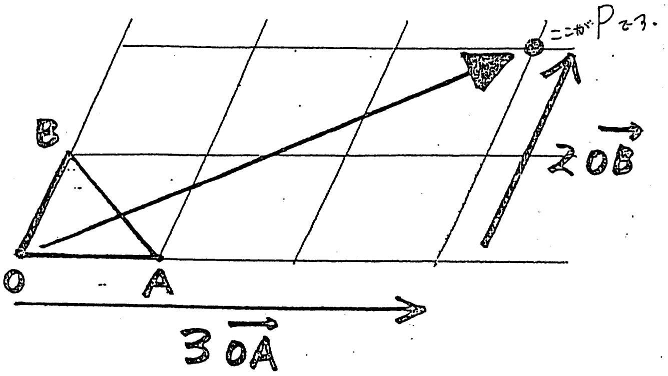
（$t=1$ のとき ⇨ P(1, 3)　$t=-1$ のとき ⇨ P(−1, −1)
$t=2$ のとき ⇨ P(2, 5)）

〈2〉点の存在範囲

> $\overrightarrow{OP}=s\overrightarrow{OA}+t\overrightarrow{OB}$ で表される点Pの存在範囲は、斜交座標系を利用せよ!!

例2

$\overrightarrow{OP}=3\overrightarrow{OA}+2\overrightarrow{OB}$ のとき、



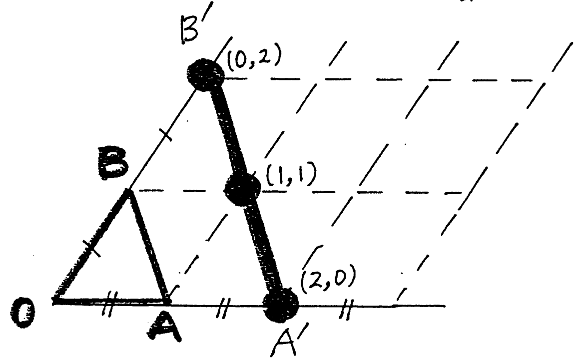
例3

△OABに対し、$\overrightarrow{OP}=s\overrightarrow{OA}+t\overrightarrow{OB}$（$s, t$は実数）とする。$s, t$が次の条件を満たしながら変化するとき、点Pの描く図形を図示しなさい。

(1) $s+t=2$，$s\geqq 0$，$t\geqq 0$

(2) $s+t\leqq 2$，$s\geqq 0$，$t\geqq 0$

解 (1) $(s, t)=(0, 2), (1, 1), (2, 0)$ などが当てはまる。



したがって、点Pの存在範囲は、

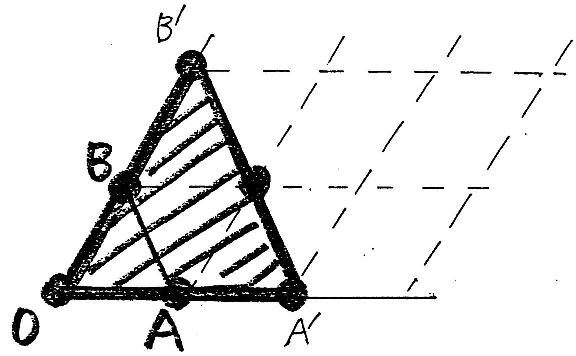
線分A′B′である。（両端含む）

（ただし、OA′＝2OA，OB′＝2OB）

(2) $(s, t)=(0, 2), (1, 1), (2, 0)$

$(0, 0), (1, 0), (0, 1)$

など。



したがって、点Pの存在範囲は、

△OA′B′の内部（境界含む）

（ただし、OA′＝2OA，OB′＝2OB）

問1

△OABに対し、$\overrightarrow{OP}=s\overrightarrow{OA}+t\overrightarrow{OB}$（$s, t$は実数）とする。$s, t$が次の条件を満たしながら変化するとき、点Pの描く図形を図示しなさい。

(1) $s+t=1$

(2) $2s+t=1$，$s\geqq 0$，$t\geqq 0$

(3) $2s+3t\leqq 6$，$s\geqq 0$，$t\geqq 0$