等差数列の導入について

三上敬揮（北海道紋別北高等学校）

平成 19 年 10 月 29 日

1　「数列」分野の導入について

生徒が数列を学習するにあたって、つまずく理由は

①　公式がやたら出てくる感がある。

②　「一般項」と「和の公式」が混同して、自分が何を計算しているかわからなくなる。

であり、興味をそそるテーマに入る以前に、「数列嫌い」＝「ギブアップ」となってしまう。

これを克服するためには、公式をグダグダ扱う前に、

”数を使って遊ぶ。いままで培った常識で興味深い結果を引き出す”

ということをするように心がけている。

2　等差数列と倍数の親密な関係

等差数列は、中学までの知識だけでほとんどの問題を解決できる、貴重な「素材」だと思う。これを、公式を駆使して、わざわざ数列嫌いを増幅させているように感じる。

１回目の授業のテーマは、

”数を使って遊ぼう !!”

と題して、等差数列に関するさまざまな結果を、公式を意識せずに導き出せる「喜び」を得るために費やしたい。高校数学で落ちこぼれている生徒ほど、本能で数を扱う能力が高いことがよくある。数の処理のコツがつかめれば、次回以降の授業は、非常に進めやすくなる。

等差数列の一般項を整理すると　$a_n = pn + q$　である。これは

”ｐの倍数ｐｎにｑを加えた形である。”

指導する側にとっては当たり前のことではあるが、教科書、参考書でこの関係を記述しているものはほとんど見ない。私は、逆にこの点を重視して、以下のように授業を進めている。

3　授業案

Ｔ：教師　　Ｓ：生徒

＜ステップ１＞　一般項を求める。

Ｔ.「次の数列（数を並べたもの）は、どんな規則性に従って並んでいますか？」

$$\{b_n\} : 3, 6, 9, 12, 15, 18, \cdots$$

Ｓ.「３の倍数（３ずつ増える）です。」

Ｔ.「次の空欄はこの数列のｎ番目です。何が入る？」

$$\{b_n\} : 3, 6, 9, 12, 15, 18, \cdots, \boxed{}, \cdots$$

Ｓ.「$3n$ です。」※これが出てこない場合は、１０番目、１２番目など、具体例を挙げて誘導する。

Ｔ.「そうです。これを一般項と呼び、$b_n = 3n$ と表します。それでは、この数列の下に、新しい数列をつくります。空欄に何が入る？」

$$\begin{array}{cccccccccc}
\{b_n\} & : & 3 & 6 & 9 & 12 & 15 & \cdots & \boxed{\text{3n}} & \cdots \\
 & & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & & \downarrow & \\
\{a_n\} & : & 1 & 4 & 7 & 10 & 13 & \cdots & \boxed{} & \cdots
\end{array}$$

Ｓ.「b_n の数列より２ずつ小さいから、$3n-2$ です。」

Ｔ.「そのとおり。一般項 $a_n = 3n-2$ ですね。このように、同じ数ずつ増えていく（または、減っていく）数列を **等差数列** といいます。この等差数列 $\{a_n\}$ は、３ずつ増えるから、３の倍数とペアで考えていくとイメージが涌きますね。同様に、ｐずつ増える等差数列は、ｐの倍数とペアで考えるとよいでしょう。」

<u>**練習１**</u>　一般項 $\{a_n\}$ を求めなさい。

$$\begin{array}{cccccccccc}
 & & 7 & 14 & 21 & 28 & 35 & \cdots & \boxed{} & \cdots \\
 & & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & & \downarrow & \\
\{a_n\} & : & 11 & 18 & 25 & 32 & 39 & \cdots & \boxed{} & \cdots
\end{array}$$

＜ステップ２＞　和を求める。

Ｔ.「次の和を求めることができますか？」

$$1 + 2 + 3 + \cdots + 98 + 99 + 100 =$$

S.「端と端の数字を足していくと、$1+100=101$, $2+99=101$, $\cdots$　となって、１０１が５０個できます。$101\times 50=5050$ です。」※ここは、指導するクラスによってスムーズにでるかどうか …

T.「そうです。つまり君は　最初と最後を足して、５０組（＝１００個÷２）作りましたね。式にすると …」

$$\frac{100}{2}(1+100)$$

「自然数の和は、図形的な見方をすると、すごく鮮やかにイメージ出来るのです。」

$$\begin{array}{llll} 1 & 1+2 & 1+2+3 & \\ \bigcirc & \bigcirc & \bigcirc & \\ & \bullet\bullet & \bullet\bullet & \cdots \\ & & \triangle\triangle\triangle & \end{array}$$

$1+2+3+\cdots+100$

$$100\text{個}\left\{\begin{array}{l}\bigcirc\\ \bullet\bullet \\ \triangle\triangle\triangle\\ \vdots \\ \square\square\cdots\square \\ \underbrace{\blacksquare\blacksquare\blacksquare\cdots\blacksquare}_{100\text{個}}\end{array}\right.$$

「そして、これを２セット逆さまにくっつけると … 」

$$100\text{個}\left\{\begin{array}{ll}\bigcirc & \blacksquare\blacksquare\blacksquare\cdots\blacksquare\\ \bullet\bullet & \square\square\cdots\square \\ \triangle\triangle\triangle & \\ \vdots & \vdots \\ \multicolumn{2}{l}{\underbrace{\blacksquare\blacksquare\blacksquare\cdots\blacksquare\quad\bigcirc}_{101\text{個}}}\end{array}\right. \qquad \text{よって、}\frac{100\times 101}{2}=5050$$

「同様に

$$\boxed{\text{＜自然数の和＞}\quad \mathbf{1+2+3+\cdots+n=\frac{n}{2}(n+1)}}$$

となります。これは、今後役に立つ式だから、ぜひ覚えたいですね。次はどう？偶数を足していくと … 」

$$2+4+6+8+\cdots+2n=$$

S.「全部の数がさっきの２倍ですね。」

$$\begin{aligned} 2+4+6+8+\cdots+2n &= 2(1+2+3+\cdots+n) \\ &= 2\cdot\frac{n}{2}(n+1) \\ &= n(n+1) \end{aligned}$$

T.「OKです。図形的な見方をすると」

2	2 + 4	2 + 4 + 6	
○○	○○●	○○●△	
	●●●	●●●△	…
		△△△△	

$2+4+6+\cdots+2n$

$$n\,\text{個}\left\{\begin{array}{l}\overbrace{\text{○○●△}\cdots\text{■}}^{(n+1)\,\text{個}}\\ \text{●●●△}\cdots\text{■}\\ \text{△△△△}\cdots\text{■}\\ \vdots\\ \text{■■■■}\cdots\text{■}\end{array}\right.$$

よって、$2+4+6+\cdots+2n=n(n+1)$

T.「さらに、奇数を足していくぞ〜!!　$1+3+5+7+\cdots+(2n-1)=\quad$」

1	1 + 3	1 + 3 + 5	
○	○●	○●△	
	●●	●●△	…
		△△△	

$1+3+5+\cdots+(2n-1)$

$$n\,\text{個}\left\{\begin{array}{l}\overbrace{\text{○●△}\cdots\text{■}}^{n\,\text{個}}\\ \text{●●△}\cdots\text{■}\\ \text{△△△}\cdots\text{■}\\ \vdots\\ \text{■■■}\cdots\text{■}\end{array}\right.$$

S.「$1+3+5+\cdots+(2n-1)=n^2$ だ!! すごくシンプルになりましたね。」
T.「自然数の和は、魅力満載なんですよ。いままでの式を眺めると、すべて等差数列の和であることは、気づきましたか?そして、計算を振り返ると」

$$1+2+3+\cdots+n=\frac{n}{2}(n+1)$$

$$2+4+6+\cdots+2n=n(n+1)\left(=\frac{n}{2}(2n+2)\right)$$

$$1+3+5+\cdots+(2n-1)=n^2\left(=\frac{n}{2}(2n)\right)$$

「これらをまとめると、

＜等差数列の和の求め方＞　$\boxed{\mathbf{S} = \dfrac{\textbf{項数}}{\mathbf{2}}(\textbf{初項＋末項})}$

となりますね。数列の初めの数を **初項**、最後の数を **末項** と呼びます。確かに、初めの１から１００までの和のとき

$$1 + 2 + 3 + \cdots + 100 = \frac{100}{2}(1 + 100)$$

でしたね。」

<u>練習２</u>　次の和を求めなさい。

(1)$3 + 6 + 9 + \cdots + 3n =$

(2)$4 + 10 + 16 + \cdots + (6n - 2) =$

Ｔ.「次、いこー !! 」

$$13 + 21 + 29 + 37 + \cdots + 213 =$$

Ｓ.「うーん ･･･ 何個だろう ･･･ 」

Ｔ.「ほらほら。また、さっきやった「倍数」との比較、してごらん。」

Ｓ.「はーい !! 」

$$\begin{array}{ccccccccc} & & 8 & 16 & 24 & 32 & \cdots & \boxed{208=8\times 26\text{番目}} & \cdots \\ & & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & & \downarrow & \\ \{a_n\} & : & 13 & 21 & 29 & 37 & \cdots & \boxed{213} & \cdots \end{array}$$

Ｓ.「 ･･･ ということは、$\dfrac{26}{2}(13 + 213) = 2899$　です。」

Ｔ.「すばらしい。これで、等差数列についての知識は、大部分つかんだことになります。今日はわかりやすく「増えていく等差数列」だけで話しましたが、実際は、一定の数ずつ減っていく場合とか、分数を含んだ場合などもあり、単純に処理できないものもあります。あらゆる場合に対応するためには、やはり公式をしっかりと活用できる能力を身につけて欲しいのです。今日は、「数を使って遊ぶ」という観点で授業を進めました。」

4　最後に

以上の内容は、私たち教員にとっては「ありふれた新鮮味のない題材」です。しかし、生徒にとっては、普段考えたことのない着眼点であり、なおかつ単純なので、数学が苦手な生徒も取り組みやすいものです。

私は教員９年目で、ほぼ毎年、数列を指導していますが、数列に苦手意識を持つ生徒の何と多いことか。出だしから、なんとなく公式に圧倒されて、不慣れな「添え字」に苦戦して、興味を持つことなく拒否反応を起こしてギブアップ！

高校生にとって、「数列」と「ベクトル」は鬼門であり、生徒が「苦手意識を持つ前に」興味関心を引き出してあげたい。

そのためには、新単元の導入１回目の授業が絶対的に重要になります。教科書のページにこだわらず、しかしながら、様々な出版社の教科書を日々研究しながら、初回の授業に、いかに魅力を盛り込むか。それが、私の今の目標です。