北海道算数数学教育会高等学校部会第 104 回数学教育実践研究会レポート

フィボナッチ数列にまつわるエトセトラ

北海道札幌東陵高等学校　川嶋　哲典

2018 年 1 月 27 日

1　はじめに

2016 年 4 月から今年 3 月までの 2 年間，職場の理解を得て，北海道教育大学大学院教育学研究科教科教育専攻数学教育専修修士課程へ通わせていただいています．先日，ようやく修士論文を提出し終えたところですが，この研究の過程で,「フィボナッチ数列と黄金比」の授業実践を 1 時間行いました．

ところで，フィボナッチ数列には数多の性質があり，そのうちどれを実際の授業で採り上げようか，時間的都合などを考慮すると大変困りました．大学院のゼミで相談に乗ってもらったことも多々あります．今回のレポートは，その準備過程でまとめたフィボナッチ数列に関するお話を並べてみたものです．

2　フィボナッチ数列の歴史・定義・一般項

2.1　歴史

現在我々が使っているインド・アラビア数字とその計算法をヨーロッパ世界に伝えたのは，レオナルド・ピサノ (1170 代-1250 頃) である．中世のキリスト教ヨーロッパ世界を通じてひときわ高くそびえる独創的な天才数学者である．ここでは，中村 (2015) の記述に沿ってレオナルド・ピサノの歴史をまとめておく．

彼はトスカナ地方の都市国家ピサに生まれ，諸国を遍歴した後にピサで活躍した．父ギリエルモはピサ市の税関官吏として北アフリカのブギア (現在のアルジェリアのベジャイア) に赴いた．あるとき父に呼ばれてブギアに行き，数日間インド・アラビア数字とその計算法を学び，その後各地を旅して学者たちと議論を重ね，インドの計算法がいかに優れているかを実感し,『算盤の書』(算法の書/計算の書とも訳される) を書いた．この第 12 章に「ウサギのつがいの問題」が載っている．

中村 (2008) は「“フィボナッチ”は 19 世紀の数学史家がつけた名前だ」としていたが，これはリブリの『イタリア数学史』(1838-41) が,「“Leonardo Pisano Filius Bonacci”という名前は 13 世紀頃には“Fibonacci”と縮めたもので，トスカナ地方の家族の名前には多くの例が見られる」と書いていたことを踏まえた記述だったそうだが，これは中村 (2015) で次のように訂正している．

リューネブルクらが古い文献を調べた結果，18 世紀の中頃から“Fibonacci”と使われていたことが判明したが，レオナルドが活躍した当時はもちろん，それ以降数百年の間に使われた形跡はないので，後から作られたのは確かだが,「リブリが作った名前」ではなかったという．

レオナルド・ピサノの著作集 (19 世紀半ば, 全 2 巻) を著したボンコンパーニの論文 (1852) の中に，“Fibonacci”という名前を使った人物を調べ上げたものがある．これによると，18 世紀終わりにグリマルディ(1790-92) とコッサリ (1797-99) が「フィボナッチ」を使い，それに先立って，18 世紀後半には，ダル・ボルゴ (1765)，テンペスティ(1787) らとグリマルディが,「Fibonacci = filio Bonacci（ボナッチの息子)」と説明したという．

「フィボナッチ」というニックネームだった，というのは俗説であり，また「お父さんはボナッチである」は誤った情報であると中村 (2015) は説明している．

2.2　定義と一般項

定義 1 （フィボナッチ数列）

漸化式 $F_1 = F_2 = 1,\ F_{n+2} = F_{n+1} + F_n$ で定義される数列 $\{F_n\}$，すなわち

$$1,\ 1,\ 2,\ 3,\ 5,\ 8,\ 13,\ 21,\ 34,\ 55,\ 89,\ 144,\ 233,\ 377,\ 610,\ 987,\ \cdots$$

をフィボナッチ数列と呼ぶ．

定理 1　フィボナッチ数列 $\{F_n\}$ の一般項は，

$$F_n = \frac{1}{\sqrt{5}}\left\{\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n\right\}$$

と表される．

証明. (この証明は瀬山 (2008) に依ります.)

漸化式 $F_{n+2} = F_{n+1} + F_n \cdots ①$ を満たすことを「フィボナッチの性質をもつ」と呼ぶことにする．ここで，$F_1 = F_2 = 1$ はとりあえず考えない．

フィボナッチの性質をもつ等差数列は，0, 0, 0, 0, $\cdots$ しかないことは自明.

そこで，フィボナッチの性質をもつ等比数列が存在すると仮定して，$F_n = ar^{n-1}$ を①に代入すると，

$ar^{n+1} = ar^n + ar^{n-1} \cdots ②$

となる．ここで $a = 0,\ r = 0$ とすると，この数列は 0, 0, 0, 0, $\cdots$ となってしまうので，$a \neq 0,\ r \neq 0$ と仮定する．

このとき，②の両辺を ar^{n-1} で割ると，

$r^2 = r + 1 \cdots ③$

が得られる．すなわち，ある等比数列がフィボナッチの性質を有しているならば，その公比は③を満たしている，ということがわかる．

③を解くと，$r = \dfrac{1 \pm \sqrt{5}}{2}$ となる．a には何も条件がなかったので，このことから 2 つの等比数列

$$F_n = a\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{n-1} \text{ と } F_n = a\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{n-1}$$

はどちらもフィボナッチの性質を満たしていることになる．しかし，これらはフィボナッチ数列にはならない．

ところが今の場合，次の重ね合わせの原理が成り立つ．

補題 1 （重ね合わせの原理）

数列 $\{a_n\}$ と $\{b_n\}$ がフィボナッチの性質をもつなら，数列 $C_1a_n + C_2b_n$ ($C_1,\ C_2$ は任意の定数) もフィボナッチの性質をもつ．

証明. 数列 $\{c_n\}$ を $c_n = C_1a_n + C_2b_n$ とおき，これがフィボナッチの性質をもつことを示す．

$$\begin{aligned} c_{n+1} + c_n &= (C_1a_{n+1} + C_2b_{n+1}) + (C_1a_n + C_2b_n) \\ &= C_1(a_{n+1} + a_n) + C_2(b_{n+1} + b_n) \\ &= C_1a_{n+2} + C_2b_{n+2} \\ &= c_{n+2} \end{aligned}$$

となるから，数列 $\{c_n\}$ はフィボナッチの性質をもつ．

□

定理 1 の証明の続き.　この重ね合わせの原理と先の結果を合わせると，

$$F_n = C_1\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{n-1} + C_2\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{n-1}$$

が，$C_1,\ C_2$ を任意の定数としてフィボナッチの性質をもつことになる．

これがフィボナッチ数列になるように，$C_1,\ C_2$ を定めよう．$F_1 = F_2 = 1$ だから，

$$
\begin{cases}
C_1 + C_2 = 1 \\
\dfrac{1+\sqrt{5}}{2} C_1 + \dfrac{1-\sqrt{5}}{2} C_2 = 1
\end{cases}
\tag{1}
$$

となる．この連立方程式を解くと，$C_1 = \dfrac{1}{\sqrt{5}} \cdot \dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$，$C_2 = -\dfrac{1}{\sqrt{5}} \cdot \dfrac{1-\sqrt{5}}{2}$ が得られ，したがってフィボナッチ数列の一般項が得られる．

$\square$

3　いろいろな性質

定理 2　フィボナッチ数列 $\{F_n\}$ について，$F_n = {}_n\mathrm{C}_0 + {}_{n-1}\mathrm{C}_1 + {}_{n-2}\mathrm{C}_2 + \cdots$ が成り立つ．

昨夜，インターネット上でこの性質の証明をようやく見つけました $\cdots$ が，まだ理解できていません．ですので，ここでは省略させてください．

定理 3　フィボナッチ数列 $\{F_n\}$ について，$\displaystyle\sum_{k=1}^{n} F_k = F_{n+2} - 1$ が成り立つ．

証明. フィボナッチ数列の定義（漸化式）は，$F_1 = F_2 = 1 \cdots$①，$F_{n+2} = F_{n+1} + F_n \cdots$② である．
②より $F_n = F_{n+2} - F_{n+1}$．これを $n = 1$ から順に書いて足すと，

$$
\begin{array}{rl}
 & F_1 = F_3 - F_2 \\
 & F_2 = F_4 - F_3 \\
 & F_3 = F_5 - F_4 \\
 & \quad\vdots \\
+) & F_n = F_{n+2} - F_{n+1} \\
\hline
 & F_1 + F_2 + \cdots + F_n = F_{n+2} - F_2
\end{array}
$$

①より $F_2 = 1$ だから，$\displaystyle\sum_{k=1}^{n} F_k = F_{n+2} - 1$．

□

定理 4　連続するフィボナッチ数は，互いに素である．

証明. (この証明はポザマンティエ＆レーマン (2010) に依ります.)

$F_1 = 1$ と $F_2 = 1$ は互いに素であることは明らかである．

そこで，F_k と F_{k+1} が互いに素であると仮定する．

このとき，F_{k+1} と F_{k+2} が 1 でない公約数 b をもつとすると，フィボナッチ数列の定義より $F_k = F_{k+2} - F_{k+1}$ であるから，F_k は約数 b をもつことになる．

すると，F_k と F_{k+1} も公約数 b をもつことになるので，F_k と F_{k+1} が互いに素であることに矛盾する．

したがって，F_{k+1} と F_{k+2} に 1 以外の公約数はあり得ず，これらは互いに素であるから，数学的帰納法により示された．

□

定理 5　すべての自然数は，フィボナッチ数列の異なる幾つかの項の和として表される．

証明.

$n = 1$ のとき成り立つことは明らか．

$n = 2$ のとき，$2 = 1 + 1$ より $n = 2$ のときも成り立つ．

$n = 3$ のとき，$3 = 2 + 1$ より $n = 3$ のときも成り立つ．

$n = 4$ のとき，$4 = 3 + 1 = 2 + 1 + 1$ より $n = 4$ のときも成り立つ．

そこで任意の自然数を N とし，N 未満の自然数は異なる幾つかのフィボナッチ数の和として表すことができるものと仮定する．ここで，N を超えない最大のフィボナッチ数を F_n とおく．このとき $N < F_n + 1$ が成り立つ．

$F_{n+1} = F_n + F_{n-1}$ なので，$0 \leqq N - F_n < F_{n-1}$.

$F_{n-1} < F_n \leqq N$ より，仮定から，$N - F_n$ は異なる幾つかのフィボナッチ数の和として表せる．すなわち N は異なる幾つかのフィボナッチ数の和として表せる．

以上から，すべての自然数は異なる幾つかのフィボナッチ数の和として表すことができる．

□

例 1

(1) $13 = 5 + 8 = F_5 + F_6$, $13 = 2 + 3 + 8 = F_3 + F_4 + F_5$（何通りか存在する場合もある.）

(2) $45 = 3 + 8 + 34 = F_4 + F_5 + F_6$

■

定理 6　フィボナッチ数列の各項の一の位で，1, 1, 2, 3, 5, 8, 3, 1, 4, 5, $\cdots$ のように数列をつくると，やがて必ず最初の 2 数に戻ってくる．

証明. (これは結城 (2014) を参考にしました.)

この数列を 2 つの数ずつペアにし，並べた列を考える．

$$(1,1),\ (1,2),\ (2,3),\ (3,5),\ (5,8),\ \cdots$$

すると，このペアは 100 種類より多くはないから，鳩の巣原理によってペアを少なくとも 101 個まで作れば，必ずその中に同じペアが一組は存在することになる．

□

4　花の中に見つかるフィボナッチ

表 1　花の花弁の枚数 (スチュアート, 2012, p.48)

3	アイリス，ユリ
5	キンポウゲ，オダマキ，ヒエンソウ，ナデシコ，ノバラ
8	ハルシャギク，デルフィニウム
13	シネラリア，マリーゴールド，サワギク
21	アスター，アラゲハンゴンソウ，キクニガナ
34	オオバコ，デージー，ジョチュウギク
55	デージー，ヒマワリ
89	デージー，ヒマワリ
144	ヒマワリ

5　おわりに

筆者は，数学ができるほうではないので，自分で思いついたり考え抜いたものはほとんどなく，教えていただいたり，本に載っているようなものばかりです．おそらく，ここに挙げたものの他にも，[2] や [6] には面白い，沢山の性質が書かれていて，目が回っています．

一方で，私たちが授業で採り上げることを構想するときにどういった数学の話を実際の授業で使うかを考えると，時間的制約や対象生徒の既有知識など，諸々の条件によって変わってくると思います．そういった意味で，このレポートが何かのお役に立つことがあるならば幸いに存じます．

この教材研究をしていて，まだまだ勉強は果てしなく続きそう $\cdots$ と改めて感じた今日この頃です．

参考文献

[1] 岡本和夫ほか (2013).『数学活用 教授用指導書』. 実教出版.

[2] コンウェイ, J.H. & ガイ, R.K. (2001). 根上生也 (訳).『数の本』. シュプリンガー・フェアラーク東京.

[3] スチュアート, I. (2012). 水谷淳 (訳).『数学で生命の謎を解く』. SB クリエイティブ.

[4] 瀬山士郎 (2008).『読む数学：数列と級数がわかる』. ベレ出版.

[5] 中村滋 (2008).『フィボナッチ数の小宇宙 (改訂版)』. 日本評論社.

[6] 中村滋 (2015).『数学史の小窓』. 日本評論社.

[7] ポザマンティエ, A. S. & レーマン, I. (2010). 松浦俊輔 (訳).『不思議な数列フィボナッチの秘密』. 日経 BP 社.

[8] 結城浩 (2007).『数学ガール』. SB クリエイティブ.

[9] 結城浩 (2014).『数学ガールの秘密ノート：数列の広場』. SB クリエイティブ.