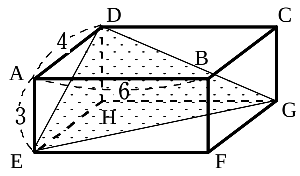
図形・立体の提示に一手間を
～Plastic で数学を～

札幌新川高等学校　吉田 奏介

図がないと問題にかかれていることをイメージ化することが難しい、教科書の図を自分が使いやすいように変換するのが苦手といった生徒に対して、いろいろなアプローチの仕方を考えてみよう。　例えば次のような問題。

> 右の図のような，$AB=6$, $AD=4$, $AE=3$ である直方体 ABCD-EFGH がある。△DEG の面積 S を求めよ。
>
> （数研出版　改訂版 数学 I 練習 37）



非常に典型的な問題であるが、イメージ化が弱い生徒には抵抗感が出てしまう。そこで教科書の図だけではなく角度の違う図や三面図にしてみるなどいろいろなイメージの提供が必要であろう。授業では「空間は平面へ」のキャッチフレーズでとにかく計算で用いる平面をかくように指導をしている。

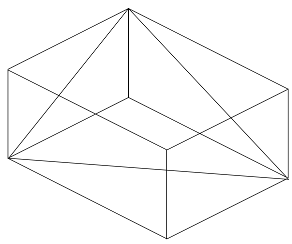


図 1　等角図に

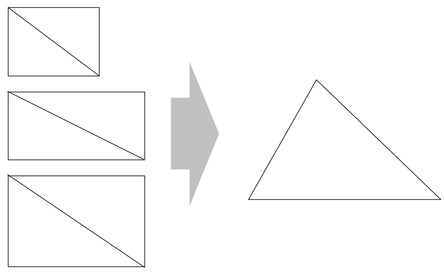


図 2　空間は平面へ

また、図形の提示にはマルチメディアの活用も考えられるだろう。

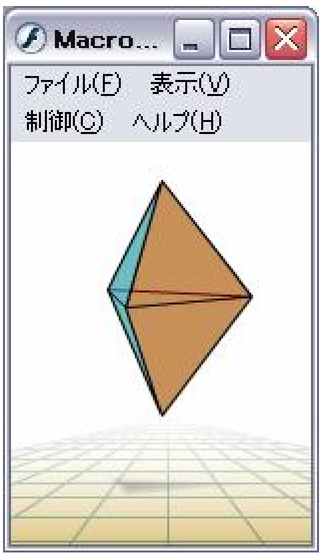


図 3　Flash での提示
動的な提示が可能

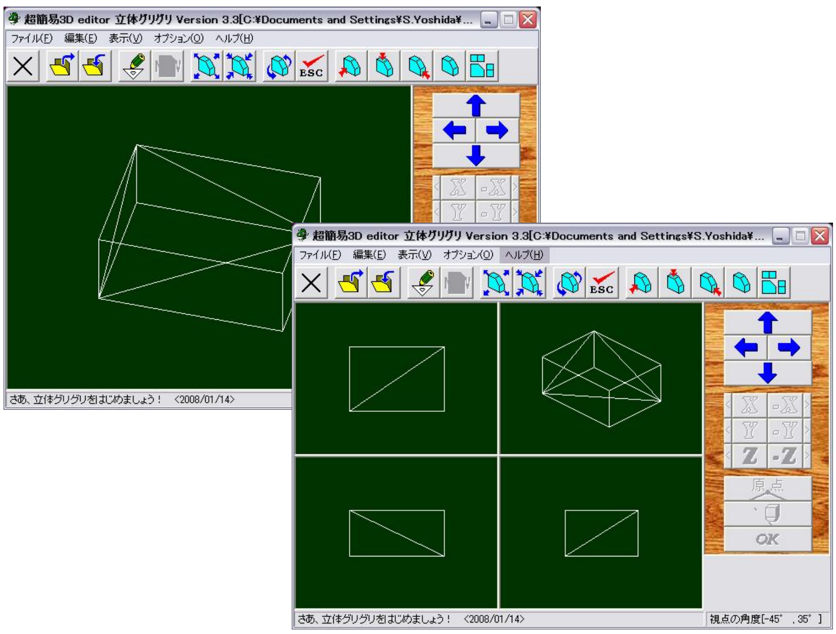


図４　超簡単３D editor 立体グリグリでの提示
中学校技術・高校工業向けのソフトであるが、立体の作成、いろいろな角度からの視点、等角図・三面図の提示が簡単にできる。

しかし「百聞は一見にしかず」との言葉があるように、立体や図形の動きを実際に見たり手に取ったりすることができると、また図形のイメージ化の度合いや経験が違うのではないだろうか。そして今回提案したいのが紙ではなくプラスチック（プラ板）を教材に用いるということである。

プラ板で教材を作ることにおけるメリットは次のようなものがあげられる。

１．形状を維持する（ほどよく硬い）
２．修理がしやすい
３．透明なプラ板で内部を提示することができる

１については、多少乱暴に扱っても大丈夫であり（われるほど硬くはない）、板 1 枚でも姿勢を維持し、それでいて軽いことがいえる。また、一度作ってしまえばしばらくそのまま継続して使うことができる（多少質の良いセロファンテープを使っておく必要があるが)。２については、パーツの差し替えのように修正することが可能である。３については、透明なプラ板を使うことで立体の内部を示すことが可能である。これは他の材料にはできないことである。これら 3 点をうまく工夫すれば、いろいろな仕掛けも作れ、見た目もきれいなものができあがってくる。

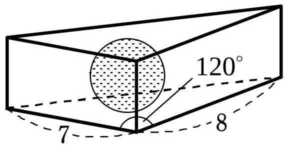
一方でデメリットとしては、次のようなものがあげられる。

１．コストが紙よりかかる
２．錐などの曲線については一工夫が必要
３．生徒に作業させるには向かない

１については、定価で 1 枚 100 円（白 0.3mm 厚）150 円（透明 0.4mm 厚）と厚紙などと比べるとやはり高くつく。しかしうまく使えばランニングコストではさほど変わらないのではないだろうか。２については、堅さと柔軟性が面を作ることに関しては優れているが、曲面を作るといったことには不向きなところとなる。厚さやカットの仕方で工夫することが必要となる。３については、見本の教材としてはよいがコストや作業を考えると、もし生徒に作業させるとしたら多少厳しいだろう。

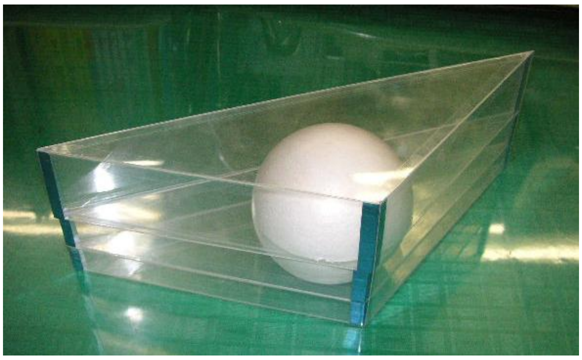
さてここからは、実際に教材を示したいと思う。

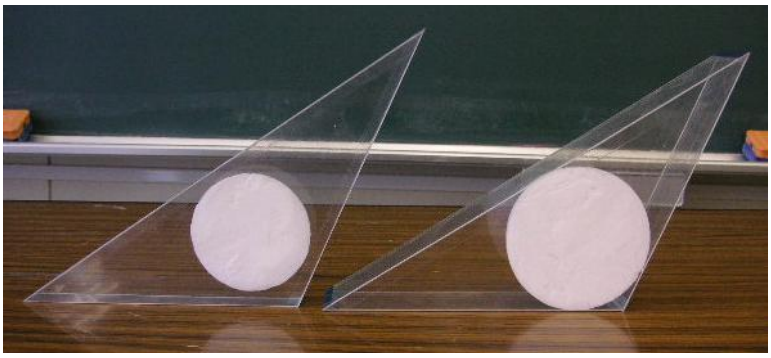
右の図のように，２辺の長さが７，８，その間の角が120°の
三角形を底面とする三角柱に，三角柱の高さと同じ直径の球が
内接している。この球の表面積 S と体積 V を求めよ



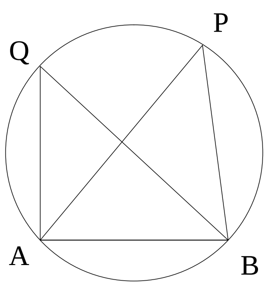
（数研出版　改訂版 数学Ｉ応用例題６）

この問題は球の表面積と体積を求めよとなっているので、球の半径をどのように導けばよいかがポイントとなる。そのさいに球の中心を通り底面に平行な断面を見ることで、三角形と内接円の問題となり球の半径は内接円の半径となる。さてこのときなぜ他のところでスライスしてはいけないのだろうか？もちろん内接円でなくなってしまうからであるが、それを具体的に示すことで「何となく」の理解から「当たり前」の理解になっていくのではないだろうか。



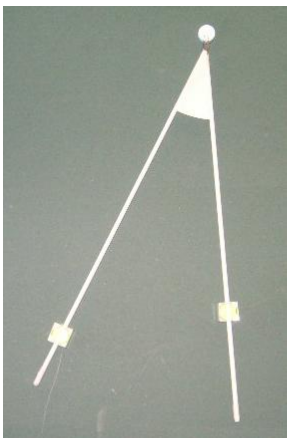


円周角の定理
　１つの弧に対する円周角は一定であり，その弧に対する
　中心角の半分である。
円の内部・外部の点と角の大小
　円の周上に３点 A,Q,B があり，点 P が直線 AB に関して
　点 Q と同じ側にあるとき
　　[1] 点 P が円の周上にある　⇒　$\angle APB = \angle AQB$
　　[2] 点 P が円の内部にある　⇒　$\angle APB > \angle AQB$
　　[3] 点 P が円の外部にある　⇒　$\angle APB < \angle AQB$
円周角の定理の逆
　４点 A,B,P,Q について，P と Q が直線 AB に関して同じ側に
　あって $\angle APB = \angle AQB$ が成り立つならば、４点 A,B,P,Q は
　１つの円周上にある。



（数研出版　改訂版 数学 A）

円周角は、求値問題などある一場面を切り取って考える場面がほとんどであり、動的な視点で考えることが少ない。そのため円の内部・外部の点と角の大小についてや円周角の定理の逆などを考えるときに、動的な視点や点の集合といった視点での考え方ができず、表面的な解釈で終わってしまう。そこで実際に同じ大きさの点の集合（軌跡）が円を描くことを示すだけでこれらの定理を包括的に理解できるのではないだろうか。



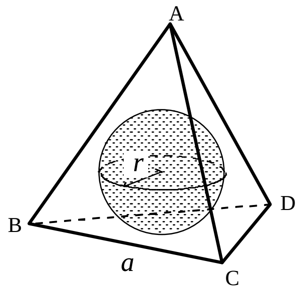
１辺の長さが a の正四面体 ABCD の体積を V, 表面積を S とする。

(1) 体積 V を求めよ。

(2) この四面体に内接する球の半径を r とすると,

$V=\frac{1}{3}rS$ が成り立つことを示せ。

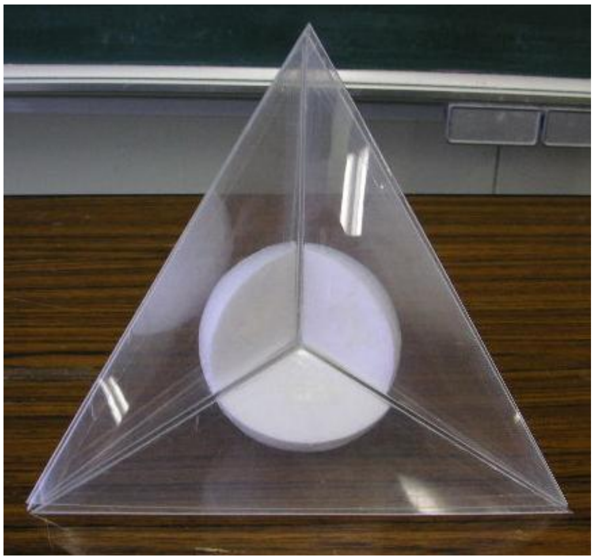
(3) 内接する球の半径 r と体積 V を求めよ。



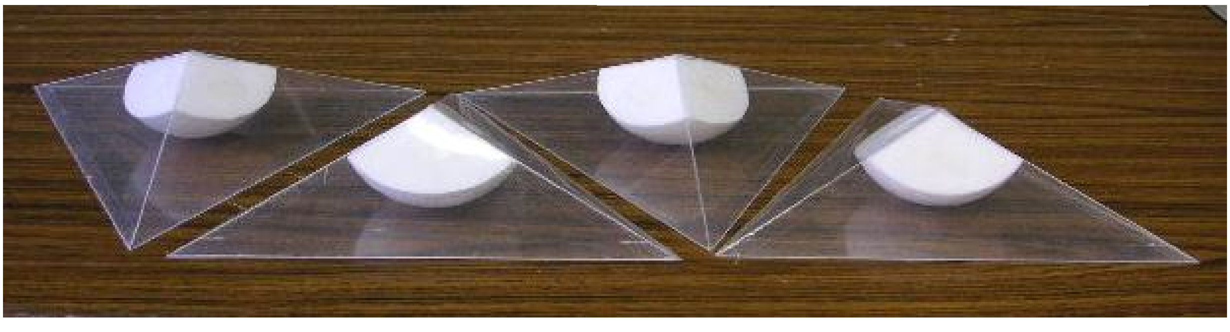
（数研出版　改訂版 数学Ⅰ演習問題 B9）

この問題は空間認識が難しい問題の一つであろう。断面図を考える際に、三角形の形や球の内接の仕方など見えてきづらく、特に球の半径を高さとする４つの合同な三角錐に分割できることはなかなか理解しにくいと思われる。そこで実際に提示すると、内接を視覚で感じ分割という選択にリアリティをもたせることができる。この感覚があれば、三角形と内接円の関係式 $S=\frac{1}{2}rs\ (s\text{は辺の和})$ **の拡張として、四面体と内接球の関係式** $V=\frac{1}{3}rS$ $(S\text{は表面積の和})$ **を捉えることに納得するのではないだろうか。**

↑球が内接する四面体



↑パーツを外すことで球の中心で交わることがわかる

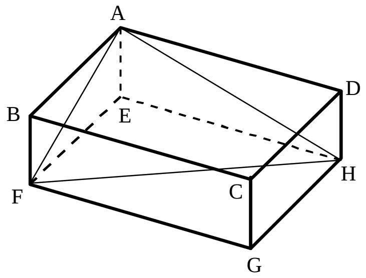


↑４つの四面体にも分割可能。半径が高さになることも見て取れる。

下の図のような直方体 ABCD-EFGH において，

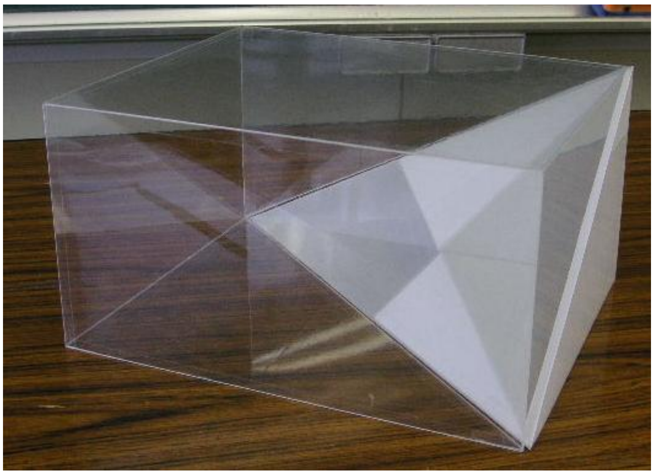
$$\mathrm{AE}=\sqrt{10},\ \mathrm{AF}=8,\ \mathrm{AH}=10$$

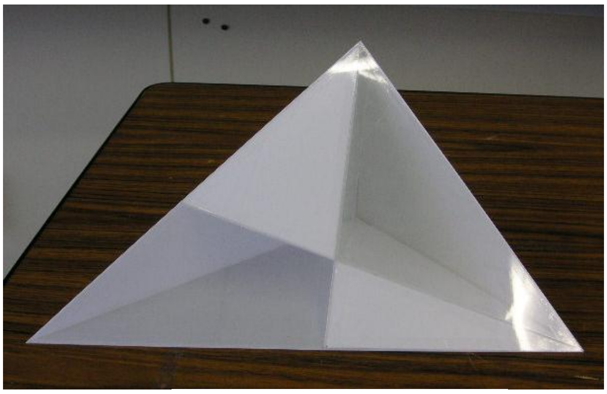
とする。このとき， $\mathrm{FH}=\boxed{\ }$ であり， $\cos\angle\mathrm{FAH}=\boxed{\ }$ である。
また，三角形 AFH の面積は $\boxed{\ }$ である。
次に， $\angle\mathrm{AFH}$ の二等分線と辺 AH の交点を P，
$\angle\mathrm{FAH}$ の二等分線と辺 FH の交点を Q，線分 FP と
線分 AQ の交点を R とする。
このとき R は三角形 AFH の $\boxed{\ }$ である。
また， $\mathrm{AP}=\boxed{\ }$ であり，したがって， $\mathrm{PF}:\mathrm{PR}=\boxed{\ }:1$ となる。
さらに，四面体 EAPR の体積は $\boxed{\ }$ である。



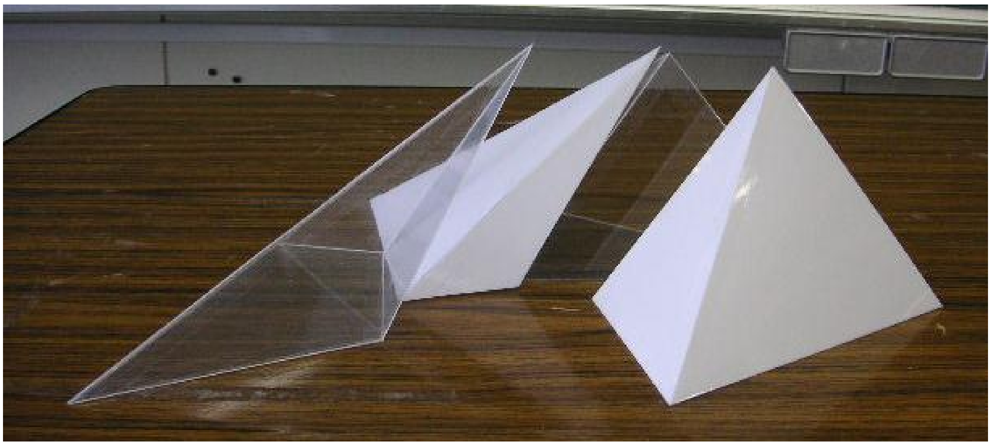
(H18 センター本試)

前半部分はこのレジメの冒頭で触れたような問題であるが、最後の四面体の体積が問題である。「高さが等しい三角形の面積比は底辺の比に等しい」の拡張として「高さが等しい錐の体積比は底面積比に等しい」ことに気づくかどうかであるが、頂点が E と裏側になっていることがさらにイメージを困難にさせている。図を書き直させる指導の大切さが出てくる問題であるが、どのように書き直せばよいかわからない生徒も多いのではないだろうか。やはり視覚、触覚に経験させておくことでイメージが可能になるのではないだろうか。



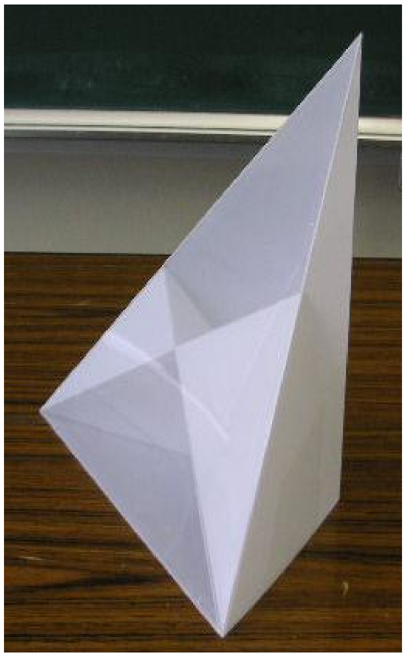


↑分割された底面



↑四面体を分割して高さを確認することができる

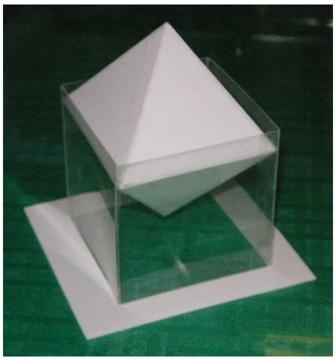
どこを高さと見るかの確認もできる→



また、課題学習や数学活用、総合的な学習の時間の扱い方などの一環として「入試問題を実際に解く」というのもおもしろいかもしれない。例えば

> Vを１辺の長さが１の正八面体とする。
> (1) Vの１つの面と平行な平面で V を切ったときの切り口の周の長さは一定であることを示せ。
> (2) １辺が１の正方形の穴が空いた平面がある。V をこの平面にふれることなく穴を通過させることができるか。結論と理由を述べよ。　答(1) 3　(2) 通過できる(略)　（東京大学）

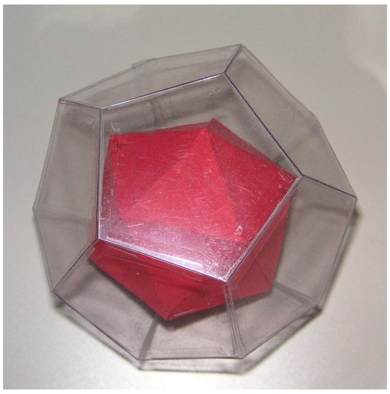
この問題は互いに反対にある２頂点を結ぶ線分に関して点対称であることや、向かい合う面が平行となることの活用が必要なのだが、これも模型を手に取るとそのことが実感できる。通過することも明らかなので、逆説的な思考で「なぜだろう？」を式にしてみるのもおもしろいのではないだろうか。(チャート式の解答では正方形の穴を通す際にずらしを行うような感じで書かれているが、実物ではそのまま通過できる角度があることがわかる。)

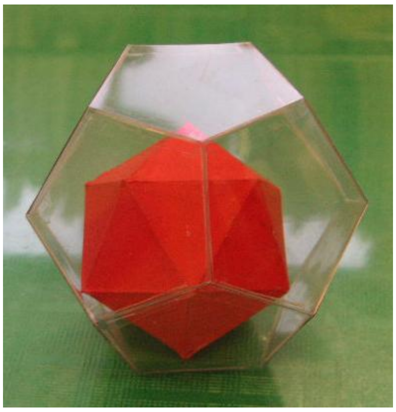


また

> １辺が１の正十二面体に、１辺が１の正二十面体が内包されることを示せ。
> （出典不明）

正十二面体の１２の面の中心を結ぶと正二十面体ができあがることからも明らかであるが、予想以上にサイズが異なるものである。(なお、何の問題であったかご存じの方はご連絡下さい。)





● 最後に

図形に対する経験が遅くなったり薄くなったりしてしまった現学習指導要領で学んできた生徒に対して効果的な提示が必要であり、また工夫のしやすい単元でもあると思われます。趣味の一環で作った所もありますが、生徒の反応も良いものでした（理解や結果につながるかは、まだわかりませんが)。

こんなのもおもしろいのでは？という活用があったらアイデアをいただければ幸いです。