# 確認 行列 $A$ の $n$ 乗の確認

★行列 $A$ の $n$ 乗の求め方のパターンを理解しておこう！

## ◎ 固有値を利用しない場合

1　$A^2, A^3, \cdots\cdots$ と計算して ある規則性が　⇒　$A^n$ を推測し、数学的帰納法で証明

2　$A^2, A^3, \cdots\cdots$ と計算して　$A^k = \bullet \times E$

⇒ $n$ を $k$ で割った余りで分類

例）

$A^2 = E$ のタイプ

⇒ $A^n = \begin{cases} A & (n\text{が奇数のとき}) \\ E & (n\text{が偶数のとき}) \end{cases}$

$A^2 = -E$ のタイプ

⇒ $A^n = \begin{cases} A & (n = 4m-3) \\ -E & (n = 4m-2) \\ -A & (n = 4m-1) \\ E & (n = 4m) \end{cases}$

$A^2 = O$ のタイプ

⇒ $A^n = O \quad (n \geqq 2)$

3　$A^2, A^3, \cdots\cdots$ と計算して ある規則性が　⇒　$A^n$ を推測し、数学的帰納法で証明

4　CH 定理の利用 その① 割り算の応用

5　CH 定理の利用 その② 漸化式の応用

⇒ CH 定理により $A^2 - sA + tE = O$ とし

$x^n = \left(x^2 - sx + tE\right)Q\left(x\right) + px + q$

と計算できたなら、

$A^n = pA + qE$

**万能型**

⇒ CH 定理により $A^2 - \left(\alpha + \beta\right)A + \alpha\beta E = O$ で

ⅰ）$\alpha \neq \beta$ のとき

$A\left(A - \alpha E\right) = \beta\left(A - \alpha E\right)$ より $A^n\left(A - \alpha E\right) = \beta^n\left(A - \alpha E\right)$

$A\left(A - \beta E\right) = \alpha\left(A - \beta E\right)$ より $A^n\left(A - \beta E\right) = \alpha^n\left(A - \beta E\right)$

辺々引いて整理すると

$$A^n = \frac{\beta^n - \alpha^n}{\beta - \alpha}A - \frac{\alpha\beta^n - \beta\alpha^n}{\beta - \alpha}E$$

ⅱ）$\alpha = \beta$ のとき

$A\left(A - \alpha E\right) = \beta\left(A - \alpha E\right)$ より

$A^n\left(A - \alpha E\right) = \alpha^n\left(A - \alpha E\right)$

辺々 $a^{n+1}$ で割って整理すると

$$A^n = n\alpha^{n-1}A - \left(n-1\right)\alpha^n E$$

6　CH 定理の利用 その③ $A^{-1}$ が存在しない　⇒　つまり $\Delta(A) = 0$ となるタイプ

CH 定理によりで $A^2 - (a+d)A + (\underbrace{ad - bc}_{\Delta=0})E = O$

なので　$A^2 = (a+d)A$（次数下げ）

7　数列の漸化式の利用　⇒　$A = \begin{pmatrix} a_n & b_n \\ c_n & d_n \end{pmatrix}$ とする

$A^{n+1} = A^n A = AA^n$ から対応する成分を比較することにより $a_{n+1}, b_{n+1}, c_{n+1}, d_{n+1}$ を $a_n, b_n, c_n, d_n$ で表し、これらの漸化式を利用して、$A^n$ の各成分を決定

8　原点を中心とする角 $\theta$ の回転移動　⇒　$A = \alpha\begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$ と表されると

$$A^n = \alpha\begin{pmatrix} \cos n\theta & -\sin n\theta \\ \sin n\theta & \cos n\theta \end{pmatrix}$$

■■□　固有値・固有ベクトルとは　□■■

行列$A$に対して$A\vec{u}=k\vec{u},\ \vec{u}\neq\vec{0}$を満たす実数$k$が存在するとき、$k$を$A$の固有値、$\vec{u}$を$k$に対する$A$の固有ベクトルという。

■■□　固有方程式とは　□■■

行列$A=\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$の固有値$k$が存在することは、$\Delta(A-kE)=0$を満たす実数$k$が存在することと同値である。

ここで$\Delta(A-kE)=0$は$k^2-(a+d)k+(ad-bc)=0$のことでる。これを$A$の固有方程式という。固有値$k$は固有方程式の実数解にあたる。

■■□　固有値・固有ベクトルを求める　□■■

固有値は$\Delta(A-kE)=0$または$k^2-(a+d)k+(ad-bc)=0$より求める。

固有ベクトルは$A\vec{u}=k\vec{u},\ \vec{u}\neq\vec{0}$より$(A-kE)\vec{u}=\vec{0}$を満たす$\vec{u}$を求める。

## ◎ 固有値を利用する場合

固有方程式$k^2-(a+d)k+(ad-bc)=0$の２解を $\alpha,\ \beta$ とする.

●$\alpha\neq\beta$のとき

| 9 | 行列の対角化 $(P^{-1}AP)^n=P^{-1}A^nP$の活用 |
|---|---|

⇒ $P=\begin{pmatrix} p & r \\ q & s \end{pmatrix}$とすると　$B=P^{-1}AP=\begin{pmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & \beta \end{pmatrix}$

よって$\begin{pmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & \beta \end{pmatrix}^n=\begin{pmatrix} \alpha^n & 0 \\ 0 & \beta^n \end{pmatrix}$

$(P^{-1}AP)^n=P^{-1}A^nP$から　$A^n=PB^nP^{-1}$

一般に２次の正方行列$A$が異なる２つの固有値$\alpha,\beta$をもつとき　$\alpha P+\beta Q=A$　$P+Q=E$を満たす行列$P,Q$に対して　$PQ=QP=O,\ P^2=P,\ Q^2=Q$　が成り立つ．このように、２次の正方行列$A$を$A=\alpha P+\beta Q\ (P+Q=E)$の形に表すことをスペクトル分解という

| 10 | 二項展開 $A=\alpha P+\beta Q$の活用 |
|---|---|

⇒ このとき　$A^n=(\alpha P+\beta Q)^n=\alpha^nP+\beta^nQ$

（$P+Q=E,PQ=QP=O$のとき、$P^n=P,Q^n=Q$）

| 11 | 固有ベクトルの活用 |
|---|---|

⇒ $A\begin{pmatrix} p \\ q \end{pmatrix}=\alpha\begin{pmatrix} p \\ q \end{pmatrix},\ A\begin{pmatrix} r \\ s \end{pmatrix}=\beta\begin{pmatrix} r \\ s \end{pmatrix}$から　$A^n\begin{pmatrix} p \\ q \end{pmatrix}=\alpha^n\begin{pmatrix} p \\ q \end{pmatrix},\ A^n\begin{pmatrix} r \\ s \end{pmatrix}=\beta^n\begin{pmatrix} r \\ s \end{pmatrix}$

よって　$A^n\begin{pmatrix} p & r \\ q & s \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} \alpha^np & \beta^nr \\ \alpha^nq & \beta^ns \end{pmatrix}$　から　$A^n=\begin{pmatrix} \alpha^np & \beta^nr \\ \alpha^nq & \beta^ns \end{pmatrix}\begin{pmatrix} p & r \\ q & s \end{pmatrix}^{-1}$

●$\alpha=\beta$のとき

| 12 | 行列の三角化 $(P^{-1}AP)^n=P^{-1}A^nP$の活用 |
|---|---|

⇒ $P^{-1}AP=\begin{pmatrix} \alpha & x \\ 0 & \alpha \end{pmatrix}$のとき　$\begin{pmatrix} \alpha & x \\ 0 & \alpha \end{pmatrix}^n=\begin{pmatrix} \alpha^n & x_n \\ 0 & \alpha^n \end{pmatrix}$で

$x_n$を求める．このとき　$A^n=P\begin{pmatrix} \alpha^n & x_n \\ 0 & \alpha^n \end{pmatrix}P^{-1}$

| 13 | 二項展開 $A=\alpha E+N\ (N^2=O)$の活用 |
|---|---|

⇒ このとき　$A^n=(\alpha E+N)^n=\alpha^nE+n\cdot\alpha^{n-1}N$