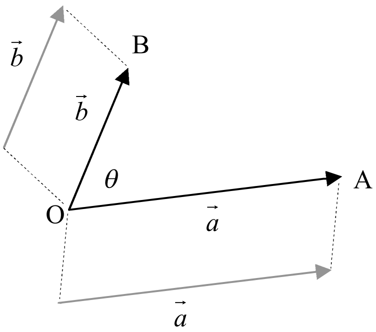
ベクトルの内積の確認

★重要公式。しっかり身につけよう



$\vec{0}$ でない２つのベクトルを $\vec{a}, \vec{b}$ とする。

始点を一致させたとき（$\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB}$）に

できる角 θ $\left(0^\circ \leq \theta \leq 180^\circ\right)$ を

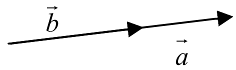
$\vec{a}$ **と** $\vec{b}$ **のなす角**という。

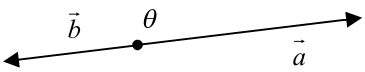
ベクトルの内積： $\vec{a}\cdot\vec{b} = \left|\vec{a}\right|\left|\vec{b}\right|\cos\theta$

【注意】　・$\vec{a}=\vec{0}$ または $\vec{b}=0$ のとき，$\vec{a}\cdot\vec{b}=0$

・$\left|\vec{a}\right|, \left|\vec{b}\right|, \cos\theta$ は実数なので，内積 $\vec{a}\cdot\vec{b}$ はベクトルでなく実数

◎ なす角と内積の関係

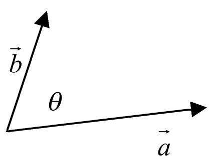


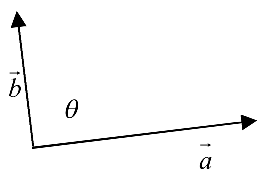


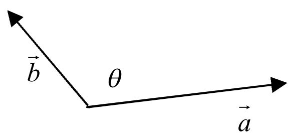
$\theta = 0^\circ$，180° のとき，図のように $\vec{a}//\vec{b}$ が成り立つ。

また，$\cos 0^\circ = 1$，$\cos 180^\circ = -1$ であるから

$$\vec{a}//\vec{b} \iff \vec{a}\cdot\vec{b} = \left|\vec{a}\right|\left|\vec{b}\right| \text{ または } \vec{a}\cdot\vec{b} = -\left|\vec{a}\right|\left|\vec{b}\right|$$







$0^\circ \leq \theta < 90^\circ$ のとき，$\cos\theta > 0$ なので　$a\cdot b > 0$

$\theta = 90^\circ$ のとき，$\cos\theta = 0$ なので　$\vec{a}\cdot\vec{b} = 0$

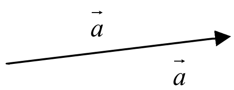
$$\vec{a} \perp \vec{b} \iff \vec{a}\cdot\vec{b} = 0$$

$90^\circ < \theta \leq 180^\circ$ のとき，$\cos\theta < 0$ なので　$\vec{a}\cdot\vec{b} < 0$

また基本性質として

$\vec{a}\cdot\vec{b} = \left|\vec{a}\right|\left|\vec{b}\right|\cos\theta = \left|\vec{b}\right|\left|\vec{a}\right|\cos\theta = \vec{b}\cdot\vec{a}$ より

$$\vec{a}\cdot\vec{b} = \vec{b}\cdot\vec{a}$$



$\vec{a}\cdot\vec{a} = \left|\vec{a}\right|\left|\vec{a}\right|\cos 0^\circ = \left|\vec{a}\right|^2$ より

$$\vec{a}\cdot\vec{a} = \left|\vec{a}\right|^2, \quad \left|\vec{a}\right| = \sqrt{\vec{a}\cdot\vec{a}}$$

$-1 \leq \cos\theta \leq 1$ より，$-\left|\vec{a}\right|\left|\vec{b}\right| \leq \left|\vec{a}\right|\left|\vec{b}\right|\cos\theta \leq \left|\vec{a}\right|\left|\vec{b}\right|$ なので

$$\left|\vec{a}\cdot\vec{b}\right| \leq \left|\vec{a}\right|\left|\vec{b}\right|$$