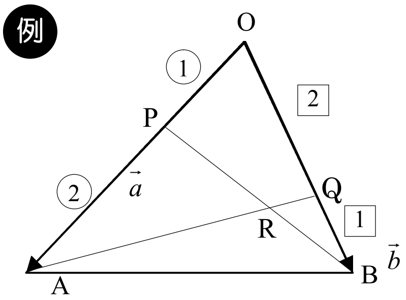
交点の位置ベクトルの確認

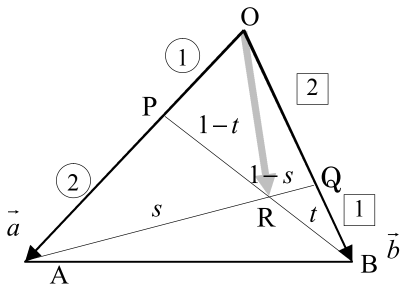
★ しっかり身につけよう

例



△OAB の辺 OA 上に $OP : PA = 1 : 2$，辺 OB 上に $OP : PB = 2 : 1$ となるように，それぞれ点 P，Q をとる。AQ と BP の交点を R とするとき，$\overrightarrow{OR}$ を $\overrightarrow{OA} = \vec{a}$，$\overrightarrow{OB} = \vec{b}$ を用いて表せ。

◎ R を AQ，BP 上の分点と見て２通りに表し，係数比較



AR : RQ＝ $s : (1-s)$ とすると，

$$\overrightarrow{OR} = (1-s)\overrightarrow{OA} + s\overrightarrow{OQ}$$
$$= (1-s)\overrightarrow{OA} + s \times \frac{2}{3}\overrightarrow{OB}$$
$$= (1-s)\vec{a} + \frac{2}{3}s\vec{b} \quad \cdots①$$

BR : RP＝ $t : (1-t)$ とすると，

$$\overrightarrow{OR} = (1-t)\overrightarrow{OB} + s\overrightarrow{OP}$$
$$= (1-t)\overrightarrow{OB} + t \times \frac{1}{3}\overrightarrow{OA}$$
$$= \frac{1}{3}t\vec{a} + (1-t)\vec{b} \quad \cdots②$$

①，②から　$(1-s)\vec{a} + \frac{2}{3}s\vec{b} = \frac{1}{3}t\vec{a} + (1-t)\vec{b}$

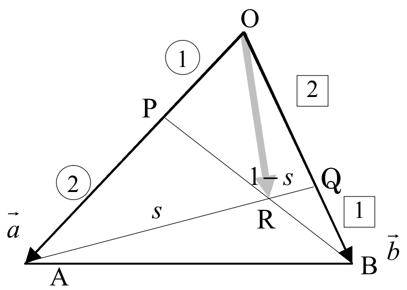
$\vec{a} \neq \vec{0}$，$\vec{b} \neq \vec{0}$，$\vec{a} \not\parallel \vec{b}$ （一次独立） であるから

この断りは，必ず明記すること

$1-s = \frac{1}{3}t$，$\frac{2}{3}s = 1-t$　　これを解いて　$s = \frac{6}{7}$，$t = \frac{3}{7}$

したがって　$\overrightarrow{OR} = \frac{1}{7}\vec{a} + \frac{4}{7}\vec{b}$

◎ 『P が直線 AB 上にあるとき、$\vec{p} = ○\vec{a} + △\vec{b}, ○ + △ = 1$ 』であることを利用



AR : RQ＝ $s : (1-s)$ とすると，　$\overrightarrow{OQ} = \frac{2}{3}\overrightarrow{OB}$ なので，

$$\overrightarrow{OR} = (1-s)\overrightarrow{OA} + s\overrightarrow{OQ}$$
$$= (1-s)\overrightarrow{OA} + s \times \frac{2}{3}\overrightarrow{OB}$$
$$= (1-s)\overrightarrow{OA} + \frac{2}{3}s\overrightarrow{OB} \cdots①$$

ここで $\overrightarrow{OP} = \frac{1}{3}\overrightarrow{OA}$ なので，

$$\overrightarrow{OR} = (1-s) \times 3\overrightarrow{OP} + \frac{2}{3}s\overrightarrow{OB}$$
$$= 3(1-s)\overrightarrow{OP} + \frac{2}{3}s\overrightarrow{OB} \cdots②$$

②において点 R は直線 BP 上の点であることから　　$3(1-s) + \frac{2}{3}s = 1$

これを解いて　$s = \frac{6}{7}$　　　したがって①より　$\overrightarrow{OR} = \frac{1}{7}\vec{a} + \frac{4}{7}\vec{b}$