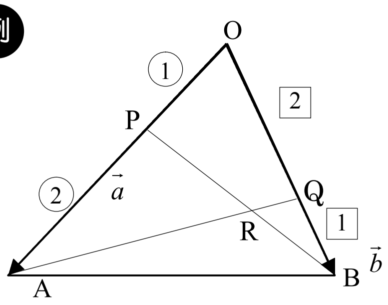
確認 交点の位置ベクトルの確認

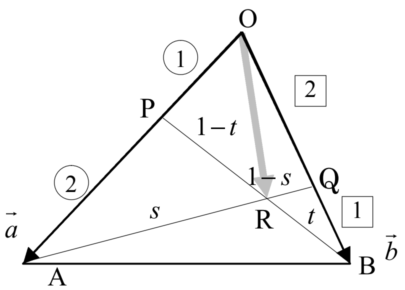
★ しっかり身につけよう

例



△OAB の辺 OA 上に $OP:PA=1:2$，辺 OB 上に $OP:PB=2:1$ となるように，それぞれ点 P，Q をとる。AQ と BP の交点を R とするとき，$\overrightarrow{OR}$ を $\overrightarrow{OA}=\vec{a}$，$\overrightarrow{OB}=\vec{b}$ を用いて表せ。

◎ R を AQ，BP 上の分点と見て２通りに表し，係数比較



AR：RQ＝ $s:(1-s)$ とすると，

$$\overrightarrow{OR}=(1-s)\overrightarrow{OA}+s\overrightarrow{OQ}$$
$$=(1-s)\overrightarrow{OA}+s\times\frac{2}{3}\overrightarrow{OQ}$$
$$=(1-s)\vec{a}+\frac{2}{3}s\vec{b}\quad\cdots①$$

BR：RP＝ $t:(1-t)$ とすると，

$$\overrightarrow{OR}=(1-s)\overrightarrow{OB}+s\overrightarrow{OP}$$
$$=(1-s)\overrightarrow{OB}+s\times\frac{1}{3}\overrightarrow{OA}$$
$$=\frac{1}{3}s\vec{a}+(1-s)\vec{b}\quad\cdots②$$

①，②から　$(1-s)\vec{a}+\frac{2}{3}s\vec{b}=\frac{1}{3}t\vec{a}+(1-t)\vec{b}$

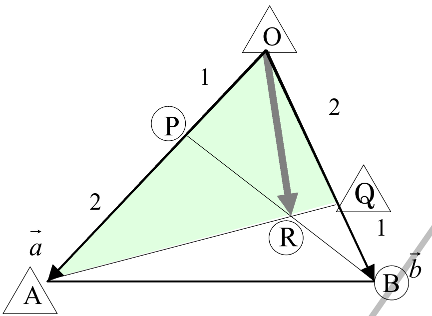
$\vec{a}\neq\vec{0}$，$\vec{b}\neq\vec{0}$，$\vec{a}\nparallel\vec{b}$ （一次独立）であるから

この断りは，必ず明記すること

$1-s=\frac{1}{3}t$，$\frac{2}{3}s=1-t$　　これを解いて　$s=\frac{6}{7}$，$t=\frac{3}{7}$

したがって　$\overrightarrow{OR}=\frac{1}{7}\vec{a}+\frac{4}{7}\vec{b}$

◎ メネラウスの定理で線分の比を見る



$$\frac{△○}{○△}\cdot\frac{△○}{○△}\cdot\frac{△○}{○△}=1$$

（頂点△と交点○で分母分子しりとりを）

※ △OAQ と線分 PB についてメネラウスの定理を適用する

△OAQ にメネラウスの定理を適用すると，

$$\frac{OP}{PA}\cdot\frac{AR}{RQ}\cdot\frac{RB}{BO}=1\qquad\text{よって}\qquad\frac{1}{2}\cdot\frac{AR}{RQ}\cdot\frac{1}{3}=1$$

$$\frac{AR}{RQ}=\frac{6}{1}\qquad\text{なので}\qquad AR:RQ=6:1$$

$$\overrightarrow{OR}=\frac{1\times\overrightarrow{OA}+6\times\overrightarrow{OQ}}{7}$$
$$=\frac{1}{7}\overrightarrow{OA}+\frac{6}{7}\times\frac{2}{3}\overrightarrow{OB}$$
$$=\frac{1}{7}\vec{a}+\frac{4}{7}\vec{b}$$