平面と空間のベクトルの対応の確認

★ 共通点を見つけて空間のベクトルの理解につなげよう

平面	空間

加法：$\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{OB}$　減法：$\overrightarrow{OA}-\overrightarrow{OB}=\overrightarrow{BA}$

実数倍：$k\vec{a}$（$k>0$ならば$\vec{a}$と同じ　$k<0$ならば$\vec{a}$と反対　特に$k=0$ならば$0\vec{a}=\vec{0}$）大きさは$|k|\times|\vec{a}|$

逆ベクトルと零ベクトルの性質：$\vec{a}+\left(-\vec{a}\right)=\vec{0}$　$\vec{a}+\vec{0}=\vec{a}$

加法の交換法則・結合法則：$\vec{a}+\vec{b}=\vec{b}+\vec{a}$　$\left(\vec{a}+\vec{b}\right)+\vec{c}=\vec{a}+\left(\vec{b}+\vec{c}\right)$

実数倍の交換法則・結合法則：$k\left(l\vec{a}\right)=(kl)\vec{a}$　$(k+l)\vec{a}=k\vec{a}+l\vec{b}$　$k\left(\vec{a}+\vec{b}\right)=k\vec{a}+l\vec{b}$

◇平行◆

平面

$\vec{a}\neq\vec{0},\ \vec{b}\neq\vec{0}$のとき

$\vec{a}\,/\!/\,\vec{b}\Leftrightarrow\vec{b}=k\vec{a}$となる実数$k$がある

$\vec{a}=\left(a_1,\ a_2\right),\ \vec{b}=\left(b_1,\ b_2\right)$のとき

$\dfrac{a_1}{b_1}=\dfrac{a_2}{b_2}$　より　$a_1b_2=a_2b_1$

空間

$\vec{a}\neq\vec{0},\ \vec{b}\neq\vec{0}$のとき

$\vec{a}\,/\!/\,\vec{b}\Leftrightarrow\vec{b}=k\vec{a}$となる実数$k$がある

$\vec{a}=\left(a_1,\ a_2,\ a_3\right),\ \vec{b}=\left(b_1,\ b_2,\ b_3\right)$のとき

$\dfrac{a_1}{b_1}=\dfrac{a_2}{b_2}=\dfrac{a_3}{b_3}$　(ただしどの成分も０でない)

◇分解◆

平面

$\vec{a}\neq\vec{0},\ \vec{b}\neq\vec{0},\ \vec{a}\not\parallel\vec{b}$のとき，任意のベクトル$\vec{p}$は実数$s,t$を用いて次の形にただ１通りに表される

$$\vec{p}=s\vec{a}+t\vec{b}$$

空間

空間内に同じ平面上にない４点O,A,B,Cがあり$\overrightarrow{OA}=\vec{a},\overrightarrow{OB}=\vec{b},\overrightarrow{OC}=\vec{c},\overrightarrow{OP}=\vec{p}$とすると任意のベクトル$\vec{p}$は実数$s,t,u$を用いて次の形ただ１通りに表される

$$\vec{p}=s\vec{a}+t\vec{b}+u\vec{c}$$

◇成分◆

平面

基本ベクトル表示：$\vec{a}=a_1\vec{e_1}+a_2\vec{e_2}$

成分表示：$\vec{a}=\left(a_1,\ a_2\right)$

※a_1をx成分，a_2をy成分という

相等：$\left(a_1,\ a_2\right)=\left(b_1,\ b_2\right)\Leftrightarrow a_1=b_1,\ a_2=b_2$

大きさ：$\vec{a}=\left(a_1,a_2\right)$のとき，$\left|\vec{a}\right|=\sqrt{{a_1}^2+{a_2}^2}$

演算：$m\left(a_1,\ a_2\right)+n\left(b_1,\ b_2\right)=\left(ma_1+nb_1,\ ma_2+nb_2\right)$

空間

基本ベクトル表示：$\vec{a}=a_1\vec{e_1}+a_2\vec{e_2}+a_3\vec{e_3}$

成分表示：$\vec{a}=\left(a_1,\ a_2,\ a_3\right)$

※a_1をx成分，a_2をy成分，a_3をz成分という

相等：$\left(a_1,a_2,a_3\right)=\left(b_1,b_2,b_3\right)\Leftrightarrow a_1=b_1,a_2=b_2,a_3=b_3$

大きさ：$\vec{a}=\left(a_1,a_2,a_3\right)$のとき，$\left|\vec{a}\right|=\sqrt{{a_1}^2+{a_2}^2+{a_3}^2}$

演算：$m\left(a_1,a_2,a_3\right)+n\left(b_1,b_2,b_3\right)$
$=\left(ma_1+nb_1,ma_2+nb_2,ma_3+nb_3\right)$

◇2点の座標◆

平面

２点$A\left(a_1,\ a_2\right),\ B\left(b_1,\ b_2\right)$について

成分表示：$\overrightarrow{AB}=\left(b_1-a_1,\ b_2-a_2\right)$

※（あたま）－（おしり）

大きさ：$\left|\overrightarrow{AB}\right|=\sqrt{\left(b_1-a_1\right)^2+\left(b_2-a_2\right)^2}$

空間

２点$A\left(a_1,\ a_2,\ a_3\right),\ B\left(b_1,\ b_2,\ b_3\right)$について

成分表示：$\overrightarrow{AB}=\left(b_1-a_1,\ b_2-a_2,\ b_3-a_3\right)$

※（あたま）－（おしり）

大きさ：$\left|\overrightarrow{AB}\right|=\sqrt{\left(b_1-a_1\right)^2+\left(b_2-a_2\right)^2+\left(b_3-a_3\right)^2}$

内積

内積の定義：$\vec{0}$でない２つのベクトル$\vec{a},\vec{b}$のなす角を$\theta\left(0^\circ\leqq\theta\leqq180^\circ\right)$とすると

$\vec{a}\cdot\vec{b}=\left|\vec{a}\right|\left|\vec{b}\right|\cos\theta$　（$\vec{a}=\vec{0}$または$\vec{b}=\vec{0}$のときは$\vec{a}\cdot\vec{b}=0$）

内積と大きさ：$\vec{a}\cdot\vec{b}=\vec{b}\cdot\vec{a}$，$\vec{a}\cdot\vec{a}=\left|\vec{a}\right|^2$，$\left|\vec{a}\right|=\sqrt{\vec{a}\cdot\vec{a}}$

内積の演算：$k,\ p,\ q,\ r,\ s$は実数とする

$\left(\vec{a}+\vec{b}\right)\cdot\vec{c}=\vec{a}\cdot\vec{c}+\vec{b}\cdot\vec{c}$，$\vec{a}\cdot\left(\vec{b}+\vec{c}\right)=\vec{a}\cdot\vec{b}+\vec{a}\cdot\vec{c}$　$\left(k\vec{a}\right)\cdot\vec{b}=\vec{a}\cdot\left(k\vec{b}\right)=k\left(\vec{a}\cdot\vec{b}\right)$　$\left[=k\vec{a}\cdot\vec{b}\right]$

これらから　$\left(p\vec{a}+q\vec{b}\right)\cdot\left(r\vec{c}+s\vec{d}\right)=pr\vec{a}\cdot\vec{c}+ps\vec{a}\cdot\vec{d}+qr\vec{b}\cdot\vec{c}+qs\vec{b}\cdot\vec{d}$

◇内積と成分◆

平面

$\vec{a}=\left(a_1,\ a_2\right),\ \vec{b}=\left(b_1,\ b_2\right)$について

内積：$\vec{a}\cdot\vec{b}=a_1b_1+a_2b_2$　※ 各成分の積の和

$\vec{a}\neq\vec{0},\vec{b}\neq\vec{0},\ \vec{a}=\left(a_1,\ a_2\right),\ \vec{b}=\left(b_1,\ b_2\right)$について

なす角：　$\cos\theta=\dfrac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{\left|\vec{a}\right|\left|\vec{b}\right|}=\dfrac{a_1b_1+a_2b_2}{\sqrt{{a_1}^2+{a_2}^2}\sqrt{{b_1}^2+{b_2}^2}}$

平行条件：$\vec{a}\cdot\vec{b}=\pm\left|\vec{a}\right|\left|\vec{b}\right|\Leftrightarrow a_1b_2-a_2b_1=0$

垂直条件：$\vec{a}\cdot\vec{b}=0$　$\Leftrightarrow a_1b_1+a_2b_2=0$

空間

$\vec{a}=\left(a_1,\ a_2,\ a_3\right),\ \vec{b}=\left(b_1,\ b_2,\ b_3\right)$について

内積：$\vec{a}\cdot\vec{b}=a_1b_1+a_2b_2+a_3b_3$　※ 各成分の積の和

$\vec{a}\neq\vec{0},\vec{b}\neq\vec{0},\ \vec{a}=\left(a_1,\ a_2,\ a_3\right),\ \vec{b}=\left(b_1,\ b_2,\ b_3\right)$について

なす角：　$\cos\theta=\dfrac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{\left|\vec{a}\right|\left|\vec{b}\right|}=\dfrac{a_1b_1+a_2b_2+a_3b_3}{\sqrt{{a_1}^2+{a_2}^2+{a_3}^2}\sqrt{{b_1}^2+{b_2}^2+{b_3}^2}}$

垂直条件：$\vec{a}\cdot\vec{b}=0$　$\Leftrightarrow a_1b_1+a_2b_2+a_3b_3=0$