確認 ベクトルの外積の確認

★ ベクトルの外積を用いて垂直なベクトルを導こう

問題　2つのベクトル $\vec{a}=(-1,4,1)$，$\vec{b}=(2,-6,-1)$ の両方に垂直な単位ベクトルを求めよ。

教科書の解答は右のようになっています。
これを空間ベクトルの外積を用いて考えてみましょう。

求める単位ベクトルを $\vec{p}=(x,y,z)$ とする。$\vec{a}\perp\vec{p},\ \vec{b}\perp\vec{p}$ の条件より　$\vec{a}\cdot\vec{p}=0,\ \vec{b}\cdot\vec{p}=0$

また，$\vec{p}$ は単位ベクトルであるから　$|\vec{p}|=1$

これらを成分で表せば，次の連立方程式が得られる。

$$\begin{cases} -x+4y+z=0 & \cdots① \\ 2x-6y-z=0 & \cdots② \\ x^2+y^2+z^2=1 & \cdots③ \end{cases}$$

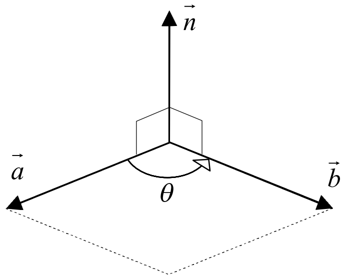
①，②より，y, z を x で表すと　$y=\dfrac{1}{2}x,\ z=-x\ \cdots④$

④を③に代入すれば　$\dfrac{9}{4}x^2=1$　すなわち $x=\dfrac{2}{3},-\dfrac{2}{3}$

これらを④に代入して，　$(x,y,z)=\left(\dfrac{2}{3},\dfrac{1}{3},-\dfrac{2}{3}\right),\left(-\dfrac{2}{3},-\dfrac{1}{3},\dfrac{2}{3}\right)$

よって，求める単位ベクトルは　$\left(\dfrac{2}{3},\dfrac{1}{3},-\dfrac{2}{3}\right),\left(-\dfrac{2}{3},-\dfrac{1}{3},\dfrac{2}{3}\right)$

ベクトルの外積とは…



$\vec{a},\vec{b}$ の外積を $\vec{a}\times\vec{b}$ と表します。$\vec{a}\times\vec{b}=\vec{n}$ とすると，$\vec{n}$ は $\vec{a},\vec{b}$ の両方に垂直なベクトル，すなわち $\vec{a},\vec{b}$ で定まる平面の法線ベクトルを指すことになります。

ちなみに外積の大きさ $|\vec{a}\times\vec{b}|$ は $\vec{a},\vec{b}$ のなす角を θ とすると

$$|\vec{a}\times\vec{b}|=|\vec{n}|=|\vec{a}||\vec{b}|\sin\theta$$

となり，$\vec{a},\vec{b}$ でできる平行四辺形の面積になります。

$\vec{a}=(a_1,a_2,a_3),\ \vec{b}=(b_1,b_2,b_3)$　（$\vec{a}\neq\vec{0},\ \vec{b}\neq\vec{0},\ \vec{a}\not\parallel\vec{b}$）において
$\vec{a}$ と $\vec{b}$ に垂直なベクトル $\vec{n}$ は

$$\begin{array}{ccccccc} a_1 & & a_2 & & a_3 & & a_1 \\ & ③ & & ① & & ② & \\ b_1 & & b_2 & & b_3 & & b_1 \end{array}$$

追加！

$a_1b_2-a_2b_1$　　$a_2b_3-a_3b_2$　　$a_3b_1-a_1b_3$

順番通り並び替えると　$\vec{n}=(a_2b_3-a_3b_2,\ a_3b_1-a_1b_3,\ a_1b_2-a_2b_1)$

同じ問題を外積を用いて解くと右のようになります。

$\vec{a}$ と $\vec{b}$ に垂直なベクトルのひとつを $\vec{n}$ とすると

$$\begin{array}{ccccccc} -1 & & 4 & & 1 & & -1 \\ & ③ & & ① & & ② & \\ 2 & & -6 & & -1 & & 2 \end{array}$$

$6-8=-2$　　$-4+6=2$　　$2-1=1$

順番通り並び替えると　$\vec{n}=(2,1,-2)$

ここで　$|\vec{n}|=\sqrt{2^2+1^2+(-2)^2}=\sqrt{9}=3$　であるから

求める単位ベクトルは

$$\pm\frac{\vec{n}}{|\vec{n}|}=\pm\frac{1}{3}(2,1,-2)=\left(\frac{2}{3},\frac{1}{3},-\frac{2}{3}\right),\left(-\frac{2}{3},-\frac{1}{3},\frac{2}{3}\right)$$