統計的な推測【標本平均の分布と正規分布】　p.92〜93

1 学習内容の説明 ⇒ 2 問題演習 ⇒ 3 振り返り（確認テスト・相互採点・リフレクションの記入）

【態度目標】しゃべる、質問する、説明する、動く、協力する、貢献する

【内容目標】標準正規分布を活用して問題を解けるようになろう

□標本平均の分布と正規分布

標本平均 $\overline{X}$ の分布について，前ページで述べた性質以外に，次の性質があることが知られている。

標本平均の分布

母平均 m，母標準偏差 σ の母集団から抽出された大きさ n の無作為標本について，

標本平均 $\overline{X}$ は，n が大きいとき，近似的に正規分布 $N\left(m,\ \dfrac{\sigma^2}{n}\right)$ に従うとみなすことができる。

この考え方を「**中心極限定理**」という 。簡単に言うと「母集団がどんな分布であっても、標本の数が大きくなると標本平均は正規分布に近似できる」ということである。

<u>母集団分布が正規分布のとき</u>は，n が大きくなくても，常に $\overline{X}$ は正規分布 $N\left(m,\ \dfrac{\sigma^2}{n}\right)$ に従う。

正規分布 $N\left(m,\ \dfrac{\sigma^2}{n}\right)$ の標準偏差は $\dfrac{\sigma}{\sqrt{n}}$ であるから，

「標本平均の分布」で述べた標本平均 $\overline{X}$ に対して，

> 母集団から大きさ n の無作為標本を抽出すると、この標本平均 $\overline{X}$ は n が大きいとき近似的に正規分布 $N\left(m, \dfrac{\sigma^2}{n}\right)$ に従うと見なすことができる

$Z=\dfrac{\overline{X}-m}{\dfrac{\sigma}{\sqrt{n}}}$ は，<u>n が大きいとき，近似的に標準正規分布 $N(0,\ 1)$</u> に従う。

> $\overline{X}$ を標準化：標本の算術平均と募平均との誤差の確率分布が中心極限定理により近似的に0になる

応用例題３）

母平均 50，母標準偏差 20 をもつ母集団から，大きさ 100 の無作為標本を抽出するとき，その標本平均 $\overline{X}$ が 54 より大きい値をとる確率を求めよ。

数学B　標本平均と正規分布　　中心極限定理

考え方　$\overline{X}$ は近似的に正規分布 $N\left(50,\ \dfrac{20^2}{100}\right)$ に従う。

標準正規分布 $N(0,\ 1)$ に従う確率変数 Z に直して考える。

解答　標本の大きさは $n=100$，母標準偏差は $\sigma=20$ であるから，

標本平均 $\overline{X}$ の標準偏差は　$\dfrac{\sigma}{\sqrt{n}}=\dfrac{20}{10}=2$

また，母平均は $m=50$ であるから，$Z=\dfrac{\overline{X}-50}{2}$ は近似的に標準正規分布 $N(0,\ 1)$ に従う。

> 中心極限定理により、母集団の分布がどのような分布であっても、母平均 m と母分散 σ^2 が存在すれば、十分な大きさの標本をとるとき、標本平均 $\overline{X}$ はほぼ正規分布に従う。

$\overline{X}=54$ のとき　$Z=\dfrac{54-50}{2}=2$

よって　$P(\overline{X}>54)=P(Z>2)$

$=0.5-p(2)$

$=0.5-0.4772=0.0228$

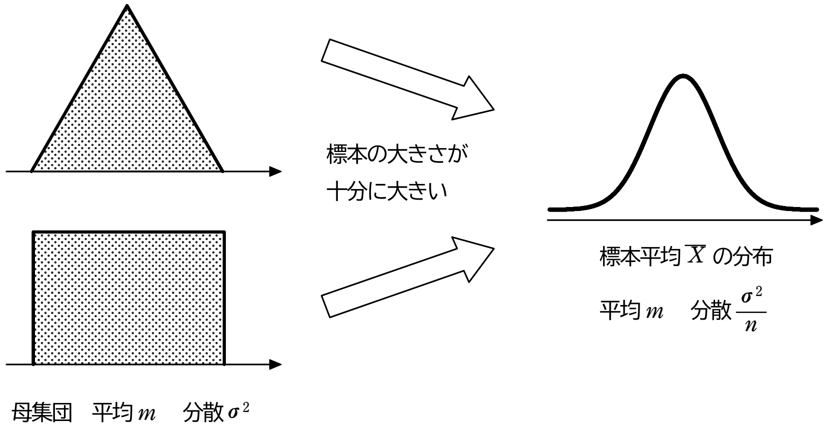
> つまり母平均 m と母分散 σ^2 がわかれば、標本平均の実際の値がどの範囲に何%の確率で現れるかがわかる

統計的な推測【標本平均の分布と正規分布】　p.92〜93

補足 中心極限定理とは？

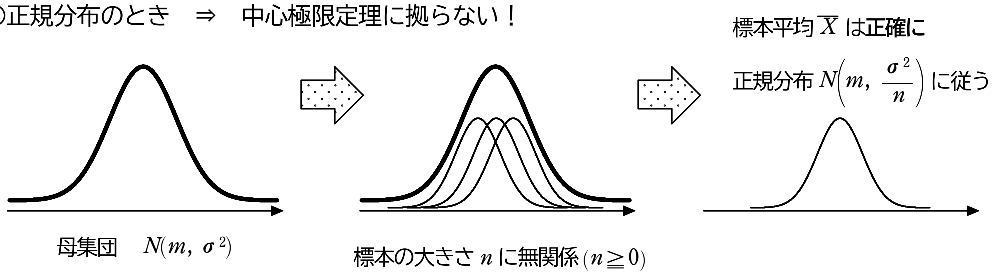
　中心極限定理とは，平均 m ，分散 σ^2 の母集団から大きさ n の標本を無作為に取り出したとき，標本平均 $\overline{X}$ の分布は， n が十分大きいとき，近似的に平均 m ，分散 $\dfrac{\sigma^2}{n}$ の正規分布に従う。

注意 もとの母集団が正規分布でなくても，平均と分散をもつ分布であれば，標本平均の分布は標本の大きさが十分に大きければ正規分布に近似できる。

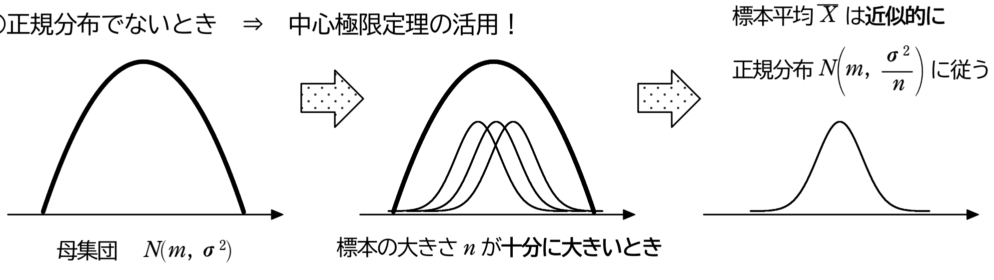


補足 中心極限定理は母集団が正規分布の場合と正規分布以外の場合で，どう違うのか？

○正規分布のとき　⇒　中心極限定理に拠らない！



○正規分布でないとき　⇒　中心極限定理の活用！



【まとめ】
　中心極限定理は，母集団が平均と分散をもつ分布であれば，母集団が正規分布でなくても，標本の大きさを十分にとれば，標本平均が従う分布は近似的に正規分布になるという定理である。
（母集団が正規分布のときは，中心極限定理によらなくても標本の大きさに関係なく標本平均は正規分布に従う。