統計的な推測【標準正規分布・正規分布の応用】　p.78〜80

1 学習内容の説明 ⇒ 2 問題演習 ⇒ 3 振り返り（確認テスト・相互採点・リフレクションの記入）

【態度目標】しゃべる、質問する、説明する、動く、協力する、貢献する

【内容目標】標準正規分布の考え方を理解しよう

□標準正規分布

a，b を定数とする。確率変数 X が正規分布 $N(m,\ \sigma^2)$ に従うとき，$aX+b$ は正規分布 $N(am+b,\ a^2\sigma^2)$ に従う確率変数であることが知られている。

> $Y=aX+b$ のとき
> $E(Y)=aE(X)+b$
> $V(Y)=a^2V(X)$

とくに，$Z=\dfrac{X-m}{\sigma}$ とおくと，確率変数 Z は正規分布 $N(0,\ 1)$ に従い，

Z の確率密度関数は，$f(z)=\dfrac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{z^2}{2}}$ となる。正規分布 $N(0,\ 1)$ を **標準正規分布** という。

> **補足** $E(X)=m$，$\sigma(X)=\sigma$ より
> 確率変数 Z の期待値，標準偏差は
> $$E(Z)=E\left(\frac{X-m}{\sigma}\right)=E\left(\frac{1}{\sigma}\cdot X-\frac{m}{\sigma}\right)$$
> $$=\frac{1}{\sigma}\cdot m-\frac{m}{\sigma}=0$$
> $$\sigma(Z)=\sigma\left(\frac{X-m}{\sigma}\right)=\sigma\left(\frac{1}{\sigma}\cdot X-\frac{m}{\sigma}\right)$$
> $$=\left|\frac{1}{\sigma}\right|\cdot\sigma=1$$

> **正規分布と標準正規分布**
> 確率変数 X が正規分布 $N(m,\ \sigma^2)$ に従うとき，
> $$Z=\frac{X-m}{\sigma}$$
> とおくと，確率変数 Z は標準正規分布 $N(0,\ 1)$ に従う。

例１７）　確率変数 X が正規分布 $N(1,\ 2^2)$ に従うとき，

$m=1$，$\sigma=2$ より，　$\boxed{Z=\dfrac{X-m}{\sigma}}$

確率変数 $Z=\dfrac{X-1}{2}$

は標準正規分布 $N(0,\ 1)$ に従う。　終

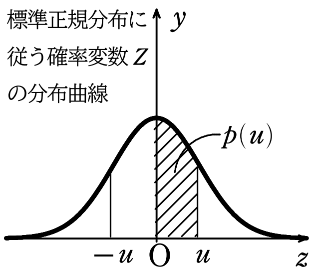
> このような変数変換を**標準化**するという

正規分布に従う確率変数 X に対して，確率 $P\ (a\leqq X\leqq b)$ などは標準正規分布を利用して求めることができる。

まずは，標準正規分布に従う確率変数について，具体的に確率を求める方法を調べてみよう。

標準正規分布 $N(0,\ 1)$ に従う確率変数 Z に対し，確率 $P(0\leqq Z\leqq u)$ を教科書では $p(u)$ で表す。

> $P(Z\geqq u)$ を $p(u)$ と表すものもある



$p(u)$ は右の図の斜線の部分の面積に等しい。

別紙には，いろいろな u の値に対する $p(u)$ の値を表にした「**正規分布表**」を載せた。

u	…………	.03	
⋮		↓	
1.2	———→	0.3907	
⋮			

$p(1.23)=0.3907$

この表によると，たとえば

$P(0\leqq Z\leqq 1.23)=p(1.23)=0.3907$　である。

また，次の等式が成り立つ。（$0\leqq u\leqq v$ とする）

$$P(-u\leqq Z\leqq 0)=P(0\leqq Z\leqq u)=p(u)$$
$$P(Z\leqq 0)=P(Z\geqq 0)=0.5$$
$$P(u\leqq Z\leqq v)=p(v)-p(u)$$
$$P(Z\leqq -u)=P(Z\geqq u)=0.5-p(u)$$

数学B

正規分布表

統計的な推測【標準正規分布・正規分布の応用】　p.78～80

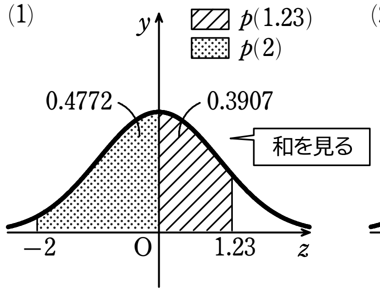
例18） (1)　$P(-2\leqq Z\leqq 1.23)=P(-2\leqq Z\leqq 0)+P(0\leqq Z\leqq 1.23)$

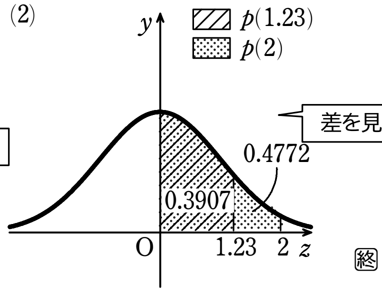
$=P(0\leqq Z\leqq 2)+P(0\leqq Z\leqq 1.23)$

$=p(2)+p(1.23)=\underline{0.4772+0.3907}=0.8679$　正規分布表から

(2)　$P(1.23\leqq Z\leqq 2)=P(0\leqq Z\leqq 2)-P(0\leqq Z\leqq 1.23)$

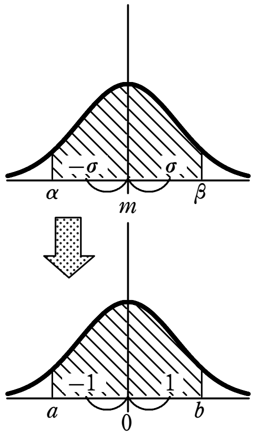
$=p(2)-p(1.23)=\underline{0.4772-0.3907}=0.0865$　正規分布表から

(1)


(2)


終

例題3） 確率変数 X が正規分布 $N(4,\ 3^2)$ に従うとき，
確率 $P(1\leqq X\leqq 7)$ を求めよ。



解答　$Z=\dfrac{X-4}{3}$ とおくと，Z は標準正規分布 $N(0,\ 1)$ に従う。

$X=1$ のとき $Z=\dfrac{1-4}{3}=-1$，$X=7$ のとき $Z=\dfrac{7-4}{3}=1$

よって　$P(1\leqq X\leqq 7)=P(-1\leqq Z\leqq 1)=2\,P(0\leqq Z\leqq 1)$

$=2p(1)=2\times 0.3413=0.6826$

□正規分布の応用

応用例題2） ある県における高校2年生の男子の身長の平均は170.5 cm，標準偏差は5.4 cm である。身長の分布を正規分布とみなすとき，この県の高校2年生の男子の中で，身長178 cm 以上の人は約何%いるか。小数第2位を四捨五入して小数第1位まで求めよ。

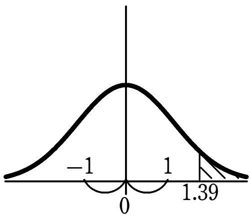
考え方　身長を X cm，$m=170.5$，$\sigma=5.4$ として，$Z=\dfrac{X-m}{\sigma}$ を考える。

$P(X\geqq 178)=a$ のとき，$100a$ %の生徒がいることになる。

解答　身長を X cm とする。確率変数 X が正規分布 $N(170.5,\ 5.4^2)$ に従うとき，

$Z=\dfrac{X-170.5}{5.4}$ は標準正規分布 $N(0,\ 1)$ に従う。

$X=178$ のとき，$Z=\dfrac{178-170.5}{5.4}\fallingdotseq 1.39$ であるから



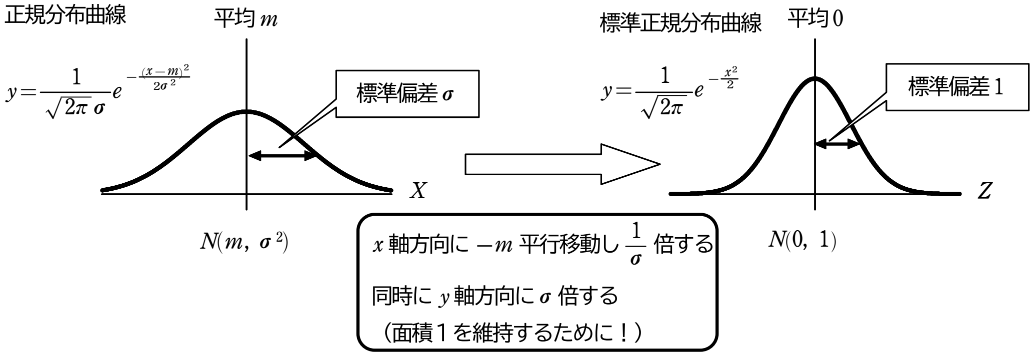
$P(X\geqq 178)=P(Z\geqq 1.39)=0.5-p(1.39)$

$=0.5-0.4177=0.0823$

よって，約8.2 %いる。　$\boxed{0.0823\times 100=8.23}$

統計的な推測【標準正規分布・正規分布の応用】　p.78〜80

補足　標準化を視覚的に理解するには？



◎ 文中では確率変数 $Z=\dfrac{X-m}{\sigma}$ の変換から標準正規分布の平均値と分散を確認したが，

確率密度関数 $f(x)=\dfrac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{x^2}{2}}$ 偶関数（左右対称） から平均値と分散を確認してみよう

【平均値】 $E(X)=\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty}xf(x)\,dx$

$$=\lim_{p\to-\infty,\ q\to\infty}\int_p^q x\cdot\frac{e^{-\frac{x^2}{2}}}{\sqrt{2\pi}}\,dx \quad （xf(x)\text{ は奇関数}）$$

$$=\lim_{p\to-\infty,\ q\to\infty}\frac{-1}{\sqrt{2\pi}}\int_p^q(-x)\cdot e^{-\frac{x^2}{2}}\,dx$$

$$=\lim_{p\to-\infty,\ q\to\infty}\frac{-1}{\sqrt{2\pi}}\Big[e^{-\frac{x^2}{2}}\Big]_p^q$$

$$=\lim_{p\to-\infty,\ q\to\infty}\frac{-1}{\sqrt{2\pi}}\left(e^{-\frac{q^2}{2}}-e^{-\frac{p^2}{2}}\right)$$

$$=0$$

【分　散】 $V(X)=E(X^2)-\{E(X)\}^2=E(X^2)-0=E(X^2)$

$$E(X^2)=\int_{-\infty}^{\infty}x^2f(x)\,dx$$

$$=\lim_{p\to-\infty,\ q\to\infty}\int_p^q x^2\cdot\frac{e^{-\frac{x^2}{2}}}{\sqrt{2\pi}}\,dx$$

$$=\lim_{q\to\infty}\frac{2}{\sqrt{2\pi}}\int_0^q x^2\cdot e^{-\frac{x^2}{2}}\,dx \quad （\because\ x^2f(x)\text{ は偶関数}）$$

$$=\lim_{q\to\infty}\frac{2}{\sqrt{2\pi}}\int_0^q(-x)\cdot\left(e^{-\frac{x^2}{2}}\right)'\,dx$$

$$=\lim_{q\to\infty}\frac{2}{\sqrt{2\pi}}\left\{\left[-xe^{-\frac{x^2}{2}}\right]_0^q-\int_0^q\left(-e^{-\frac{x^2}{2}}\right)dx\right\}$$

$$=\lim_{q\to\infty}\frac{2}{\sqrt{2\pi}}\left\{-qe^{-\frac{q^2}{2}}+\int_0^q e^{-\frac{x^2}{2}}dx\right\}$$

$$=\lim_{q\to\infty}\frac{2}{\sqrt{2\pi}}\left\{-\frac{q}{e^{\frac{q^2}{2}}}+\int_0^q e^{-\frac{x^2}{2}}dx\right\}$$

$$=\lim_{q\to\infty}\frac{2}{\sqrt{2\pi}}\int_0^q e^{-\frac{x^2}{2}}dx$$

$$=\frac{2}{\sqrt{2\pi}}\cdot\frac{\sqrt{2\pi}}{2}$$　（∵ガウス積分より）

$$=1$$

したがって　$V(X)=E(X^2)=1$