統計的な推測【同時分布・確率変数の和の期待値】　p.62～65

1 学習内容の説明 ⇒ 2 問題演習 ⇒ 3 振り返り(確認テスト・相互採点・リフレクションの記入)

【態度目標】しゃべる、質問する、説明する、動く、協力する、貢献する

【内容目標】確率分布や期待値を用いて分散の値を求められるようになろう

□同時分布

例9） 大小 2 個のさいころを投げるとき，それぞれのさいころの出る目を，X，Y とする。
大小 2 個のさいころを投げるという試行で，X，Y の値が定まる。 終

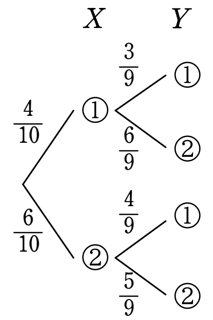
例１０） 同じ大きさの玉 10 個が入った袋があり，そのうちの 4 個には 1，6 個には 2 と書いてある。最初に 1 個を取り出し，その玉に書いてある値を X とする。最初に取り出した玉をもどさないで，2 個目を取り出し，その玉に書いてある値を Y とする。このように 2 個の玉を取り出すという試行で，X，Y の値が定まる。 終

ある試行によって X，Y の値が定まるとき，$X=a$ かつ $Y=b$ である確率を $\boldsymbol{P(X=a,\ Y=b)}$ と表す。例１０では

$$P(X=1,\ Y=1)=\frac{4}{10}\cdot\frac{3}{9}=\frac{2}{15},\quad P(X=1,\ Y=2)=\frac{4}{10}\cdot\frac{6}{9}=\frac{4}{15}$$

$$P(X=2,\ Y=1)=\frac{6}{10}\cdot\frac{4}{9}=\frac{4}{15},\quad P(X=2,\ Y=2)=\frac{6}{10}\cdot\frac{5}{9}=\frac{5}{15}$$

数学Aでは樹形図などで処理していたところ



である。このとき，X のみに着目すると

$$P(X=1)=\frac{2}{15}+\frac{4}{15}=\frac{6}{15},\qquad P(X=2)=\frac{4}{15}+\frac{5}{15}=\frac{9}{15}$$

であり，X は確率変数である。また，Y のみに着目すると

$$P(Y=1)=\frac{2}{15}+\frac{4}{15}=\frac{6}{15},\qquad P(Y=2)=\frac{4}{15}+\frac{5}{15}=\frac{9}{15}$$

であり，Y も確率変数である。

例１０の確率変数 X，Y の確率分布は，右のように表される。この対応を X，Y の **同時分布** という。2 つの確率変数を扱うときは，このような同時分布を考えている。

この表から，X と Y のそれぞれの確率分布は，次の表で与えられる。（周辺分布という）

X＼Y	1	2	計
1	$\frac{2}{15}$	$\frac{4}{15}$	$\frac{6}{15}$
2	$\frac{4}{15}$	$\frac{5}{15}$	$\frac{9}{15}$
計	$\frac{6}{15}$	$\frac{9}{15}$	1

X	1	2	計
P	$\frac{6}{15}$	$\frac{9}{15}$	1

Y	1	2	計
P	$\frac{6}{15}$	$\frac{9}{15}$	1

□確率変数の和の期待値

2 つの確率変数 X，Y の同時分布が，右の表で与えられているとき，$Z=X+Y$ とすると，Z もまた確率変数である。

X＼Y	y_1	y_2	計
x_1	p_{11}	p_{12}	$p_{11}+p_{12}$
x_2	p_{21}	p_{22}	$p_{21}+p_{22}$
計	$p_{11}+p_{21}$	$p_{12}+p_{22}$	1

たとえば，$X=x_1$，$Y=y_1$ のとき $Z=x_1+y_1$ で，その確率は p_{11} であるから，Z の期待値は次のように表される。

$$\begin{aligned}E(Z)&=(x_1+y_1)p_{11}+(x_1+y_2)p_{12}+(x_2+y_1)p_{21}+(x_2+y_2)p_{22}\\&=x_1(p_{11}+p_{12})+x_2(p_{21}+p_{22})+y_1(p_{11}+p_{21})+y_2(p_{12}+p_{22})\end{aligned}$$

ここで　$E(X)=x_1(p_{11}+p_{12})+x_2(p_{21}+p_{22})$，$E(Y)=y_1(p_{11}+p_{21})+y_2(p_{12}+p_{22})$

であるから，$E(Z)=E(X)+E(Y)$ が成り立つ。

統計的な推測【同時分布・確率変数の和の期待値】　p.62〜65

一般に，次のことが成り立つ。

> **確率変数の和の期待値**
> 2つの確率変数 X，Y について　$E(X+Y)=E(X)+E(Y)$

例１１） 大小2個のさいころを投げるとき，それぞれのさいころの出る目を，X，Y とする。
このとき，

$$E(X)=E(Y)=\frac{7}{2}$$

例２より

であるから，出る目の和 $X+Y$ の期待値は

$$E(X+Y)=E(X)+E(Y)=\frac{7}{2}+\frac{7}{2}=7$$ 終

3つ以上の確率変数の和の期待値についても，2つの場合と同様なことが成り立つ。たとえば，3つの確率変数 X，Y，Z について，次のことが成り立つ。

$$E(X+Y+Z)=E(X)+E(Y)+E(Z)$$

例１２） 大中小3個のさいころを投げるとき，それぞれのさいころの出る目を X，Y，Z とする。
このとき，出る目の和 $X+Y+Z$ の期待値は，例１１ と同様に考えて

$$E(X+Y+Z)=E(X)+E(Y)+E(Z)$$
$$=\frac{7}{2}+\frac{7}{2}+\frac{7}{2}=\frac{21}{2}$$ 終

□$aX+bY$ の期待値

2つの確率変数 X，Y と定数 a，b について，$aX+bY$ も確率変数であり，次のことが成り立つ。

> X，Y を確率変数，a，b を定数とするとき
> $$E(aX+bY)=aE(X)+bE(Y)$$

$E(aX+bY)$
$=E(aX)+E(bY)$
$=aE(X)+bE(Y)$
係数は外へ，足し算引き算はばらしてOK

応用例題１）

500円硬貨1枚と100円硬貨1枚を同時に投げて，表の出た硬貨の金額の和を Z 円とする。
Z の期待値を求めよ。

方針 表の出た500円硬貨100円硬貨の枚数をそれぞれ X，Yとすると，$Z=500X+100Y$ と表される。

解答 この試行で，表の出た500円硬貨，100円硬貨の枚数を，それぞれ X，Y とする。
X，Y の確率分布は，どちらも右の表のようになる。

表の枚数	0	1	計
確率	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	1

よって　$E(X)=E(Y)=0\cdot\frac{1}{2}+1\cdot\frac{1}{2}=\frac{1}{2}$

$Z=500X+100Y$ であるから，Z の期待値は

$$E(Z)=E(500X+100Y)=500E(X)+100E(Y)$$
$$=500\cdot\frac{1}{2}+100\cdot\frac{1}{2}=300$$

係数は外へ，
足し算引き算はばらしてOK