

## 統計的な推測【 $aX + b$ の期待値】 p.56~57

1 学習内容の説明 ⇒ 2 問題演習 ⇒ 3 振り返り(確認テスト・相互採点・リフレクションの記入)

【態度目標】しゃべる、質問する、説明する、動く、協力する、貢献する

【内容目標】確率変数の変形が、どのように影響するか考え求められるようになろう

### □ $aX + b$ の期待値

確率変数  $X$  の確率分布が右の表のように与えられているとする。 $a, b$  を定数とするとき、 $X$  に対して  $aX + b$  も確率変数であり、その分布は次のようにになる。

$X$	$x_1$	$x_2$	.....	$x_n$	計
$P$	$p_1$	$p_2$	.....	$p_n$	1

  

確率は変わらない	$aX + b$	$ax_1 + b$	$ax_2 + b$	.....	$ax_n + b$	計
	$P$	$p_1$	$p_2$	.....	$p_n$	1

よって、 $aX + b$  の期待値は、次のようになる。

$$\begin{aligned} E(aX + b) &= \sum_{k=1}^n (ax_k + b)p_k && \text{Σを分配} \\ &= a \left[ \sum_{k=1}^n x_k p_k \right] + b \left[ \sum_{k=1}^n p_k \right] && \left. \begin{array}{l} \sum_{k=1}^n x_k p_k = E(X) \\ \sum_{k=1}^n p_k = 1 \end{array} \right\} \\ &= aE(X) + b \end{aligned}$$

したがって、次のことが成り立つ。

### $aX + b$ の期待値

$X$  を確率変数、 $a, b$  を定数とするとき

$$E(aX + b) = aE(X) + b$$

とくに、 $E(aX) = aE(X)$  である。

もとの変数を  $a$  倍して  $b$  足すと  
期待値(平均)も  
 $a$  倍して  $b$  足すと求められる

例3) 1個のさいころを投げて出る目を  $X$  とすると、例2により  $E(X) = \frac{7}{2}$  である。

このとき、確率変数  $2X + 1$  の期待値は

$$E(2X + 1) = 2E(X) + 1 = 2 \cdot \frac{7}{2} + 1 = 8 \quad \text{絶}$$

別解 確率分布は次の表のようになるので

$X$	1	2	3	4	5	6	計
$2X + 1$	3	5	7	9	11	13	計
$P$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	1

$$E(2X + 1) = 3 \cdot \frac{1}{6} + 5 \cdot \frac{1}{6} + 7 \cdot \frac{1}{6} + 9 \cdot \frac{1}{6} + 11 \cdot \frac{1}{6} + 13 \cdot \frac{1}{6} = 48 \cdot \frac{1}{6} = 8$$

**□ $X^2$  の期待値**

確率変数  $X$  に対して、 $X^2$  もまた確率変数である。  
 $X$  の確率分布が右の表で与えられるとき、  
 $X^2$  の期待値は、次の式によって求められる。

$X$	$x_1$	$x_2$	……	$x_n$	
$X^2$	$x_1^2$	$x_2^2$	……	$x_n^2$	計
$P$	$p_1$	$p_2$	……	$p_n$	1

$$E(X^2) = x_1^2 p_1 + x_2^2 p_2 + \dots + x_n^2 p_n \quad \text{より}$$

$$E(X^2) = \sum_{k=1}^n x_k^2 p_k$$

例4) 1個のさいころを投げて出る目を  $X$  とするとき、 $X^2$  の期待値は

$$\begin{aligned} E(X^2) &= \sum_{k=1}^6 \left( k^2 \cdot \frac{1}{6} \right) \\ &= \frac{1}{6} \sum_{k=1}^6 k^2 \\ &= \frac{1}{6} \times \frac{1}{6} \cdot 6 \cdot 7 \cdot 13 \quad \leftarrow \boxed{\sum_{k=1}^n k^2 = \frac{1}{6} n(n+1)(2n+1)} \\ &= \frac{91}{6} \quad \text{終} \end{aligned}$$

別解 確率分布は次の表のようになるので

$X$	1	2	3	4	5	6	
$X^2$	1	4	9	16	25	36	計
$P$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	1

$$E(X^2) = 1 \cdot \frac{1}{6} + 4 \cdot \frac{1}{6} + 9 \cdot \frac{1}{6} + 16 \cdot \frac{1}{6} + 25 \cdot \frac{1}{6} + 36 \cdot \frac{1}{6} = 91 \cdot \frac{1}{6} = \frac{91}{6}$$