確認 積分の手法の確認

★ 積分の基本的な解き方をしっかり押さえておこう

1 基本となる関数の積分

※ 微分する前の関数をイメージ

$$\int \boxed{\text{微分した後}}\,dx = \boxed{\text{微分する前}} + C$$

$$\int x^{\alpha}dx = \frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1} + C \quad (\alpha \neq -1) \qquad \int \frac{1}{x}dx = \log|x| + C$$

$$\int \sin x\,dx = -\cos x + C \qquad \int \cos x\,dx = \sin x + C$$

$$\int \tan x\,dx = -\log|\cos x| + C \qquad \int \frac{1}{\cos^2 x}dx = \tan x + C$$

$$\int \frac{1}{\sin^2 x}dx = -\frac{1}{\tan x} + C$$

$$\int e^x dx = e^x + C \qquad \int \log x\,dx = x\log x - x + C$$

2 1次式のかたまりを

※ $\displaystyle\int f(ax+b)dx = \frac{1}{a}F(ax+b) + C$

① $f(x)$ を積分すると $F(x)$

② 1次式のかたまり $ax+b$ を微分してできる

余計な部分を調整するために $\dfrac{1}{a}$ が必要

③ まとめることで上の式が完成

3 積→和、次数は下げて

※ $\displaystyle\int \{f(x)+g(x)\}dx = \int f(x)dx + \int g(x)dx$

例 $\displaystyle\int (x+a)^3\,dx = \int (x^3+3ax^2+3a^2x+a^3)dx$ ← 展開

$\displaystyle\int \frac{1}{x(x+2)}dx = \int \frac{1}{2}\left(\frac{1}{x} - \frac{1}{x+2}\right)dx$ ← 部分分数分解

$\displaystyle\int \sin^2 x\,dx = \int \frac{1-\cos 2x}{2}dx$ ← 半角の公式

4 置換積分 $t = g(x)$

※ 不定積分～

$\displaystyle\int f(g(x))g'(x)dx$ (合成関数)×(かたまり)′をみたら…

$t = g(x),\ dt = g'(x)dx$ の活用で $\displaystyle\int f(t)dt$ へ

※ 定積分～次の３つに注目

①積分変数　②積分区間　③積分される関数

$t = g(x)$ とおいて、３つを変えると

$$\int_a^b f(g(x))g'(x)dx = \int_{\boxed{g(a)}}^{\boxed{g(b)}} \boxed{f(t)}\,\boxed{dt}$$

5 置換積分 $x = g(t)$

※ ４つの置き換えパターンを確実に

$$\int f(x)dx = \int f(g(x))g'(x)dx$$

① $\sqrt{a^2-x^2} \to x = a\sin\theta \left(-\dfrac{\pi}{2} \leqq \theta \leqq \dfrac{\pi}{2}\right)$

② $\dfrac{1}{a^2+x^2} \to x = a\tan\theta \left(-\dfrac{\pi}{2} < \theta < \dfrac{\pi}{2}\right)$

③ $\sqrt{ax+b} \to t = \sqrt{ax+b}$ とおいて

$x = \dfrac{1}{a}(t^2-b)$ とする

④ e^x の式→ $t = e^x$ とおいて $x = \log t$ とする

6 部分積分法

※ 不定積分～

$f(x)\times g'(x)$ に対して $f'(x)\times g(x)$ は？

表を用いて
ペアを考える。
「積分・もと」
「積分・微分」
のペアは
矢印の通り

積分	◎	⟁
もと	○	△
微分	○′	△′

※ 定積分～

原始関数が求まったところから数値代入

$$\int_a^b f(x)g'(x)dx = \left[f(x)g(x)\right]_a^b - \int_a^b f'(x)g(x)dx$$

どのパターンを用いるか、または複合的に用いるかの判断は練習で身に付けよう！

中にはこれ以外の特殊なケースや、問題の指示に従いながら解くケースも…