確認 積分区間内の求積の確認

★ 公式を効率よく活用できるように工夫しよう！

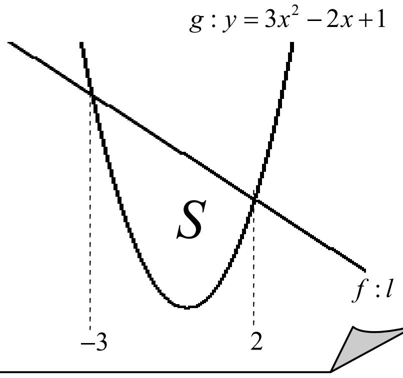
$S=\int_a^b\{f(x)-g(x)\}dx$ ：上下関係に注意して積分

この方法は一般的に用いられる求積方法となってきますが、式が複雑化して大変だったり時間がかかってしまったりすることもあるでしょう。そこで次のポイントに注目してみましょう。

$f-g$ からできる式の　次数，最高次の係数，得られる２解

例

図の面積 S を求めよ。



$f-g$ の　次数	⇒	2
$f-g$ の　係数	⇒	-3
$f-g$ の　２解	⇒	$-3,\ 2$

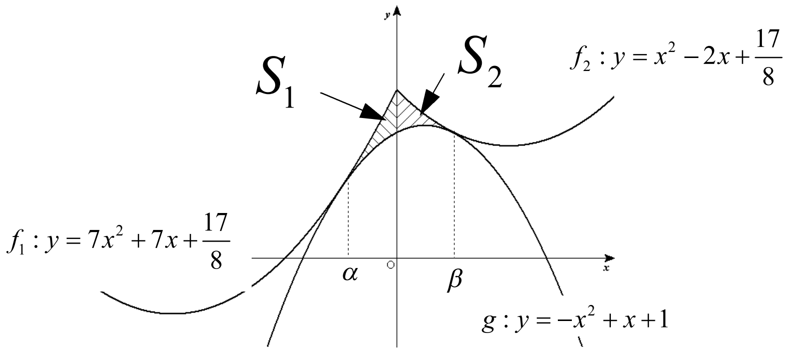
よって　$f-g=-3(x+3)(x-2)$

よって　$S=\int_{-3}^{2}-3(x+3)(x-2)dx$　となるので　公式　$S=\int_\alpha^\beta(x-\alpha)(x-\beta)dx=-\frac{1}{6}(\beta-\alpha)^3$　より

$$S=\int_{-3}^{2}-3(x+3)(x-2)dx=3\times\frac{1}{6}\{2-(-3)\}^3=\frac{1}{2}\times5^3=\frac{125}{2}$$

例

図の斜線部の面積 S を求めよ。$(\alpha<0<\beta)$



S_1

$f-g$ の　次数	⇒	2
$f-g$ の　係数	⇒	8
$f-g$ の　２解	⇒	α (重解)

よって　$f_1-g=8(x-\alpha)^2$

$\therefore S_1=8\int_\alpha^0(x-\alpha)^2dx$

S_2

$f-g$ の　次数	⇒	2
$f-g$ の　係数	⇒	2
$f-g$ の　２解	⇒	β (重解)

よって　$f_2-g=2(x-\beta)^2$

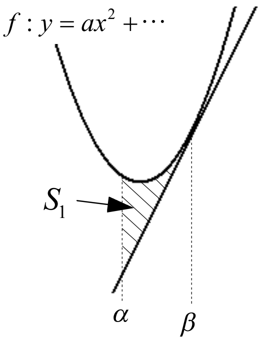
$\therefore S_2=2\int_0^\beta(x-\beta)^2dx$

よって　$S=S_1+S_2=8\int_\alpha^0(x-\alpha)^2dx+2\int_0^\beta(x-\beta)^2dx=8\left[\frac{1}{3}(x-\alpha)^3\right]_\alpha^0+2\left[\frac{1}{3}(x-\beta)^3\right]_0^\beta=-\frac{8}{3}\alpha^3+\frac{2}{3}\beta^3$

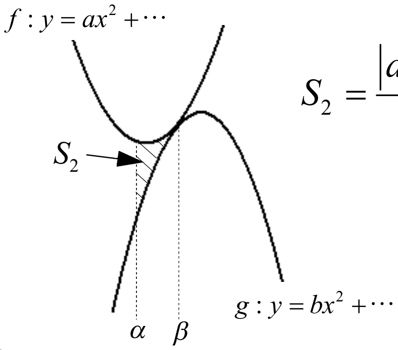
図形の面積の公式化

$$S=\int_\alpha^\beta a\left(x-\alpha\right)\left(x-\beta\right)dx=-\frac{a}{6}\left(\beta-\alpha\right)^3$$

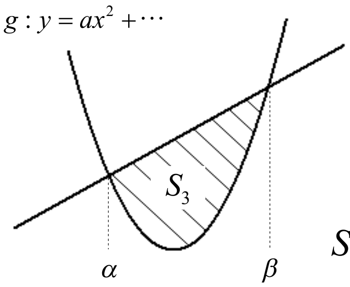
この式は２曲線の交点がα，βであり，その間の面積を出すときによく用いる式ですね。
これ以外にも$\int_\alpha^\beta\left(x-\alpha\right)^2\left(x-\beta\right)dx=-\frac{1}{12}\left(\beta-\alpha\right)^4$，$\int_\alpha^\beta\left(x-\alpha\right)^2\left(x-\beta\right)^2dx=-\frac{1}{30}\left(\beta-\alpha\right)^5$などがありますｍ。では，実際に図を見ながらパターンを確認してみましょう。



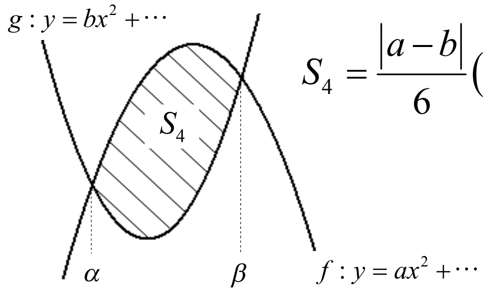
$$S_1=\frac{|a|}{3}\left(\beta-\alpha\right)^3$$



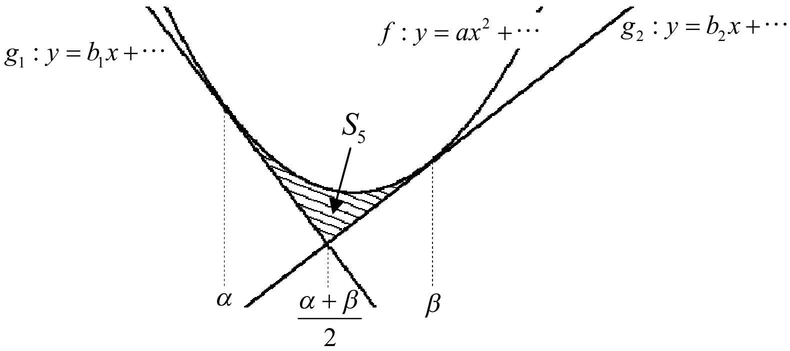
$$S_2=\frac{|a-b|}{3}\left(\beta-\alpha\right)^3$$



$$S_3=\frac{|a|}{6}\left(\beta-\alpha\right)^3$$

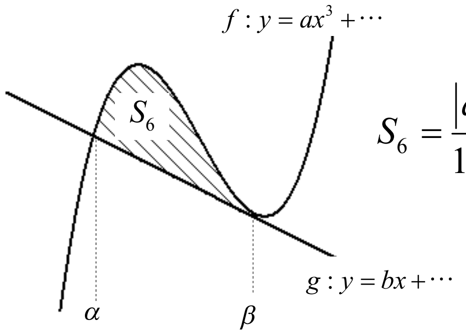


$$S_4=\frac{|a-b|}{6}\left(\beta-\alpha\right)^3$$

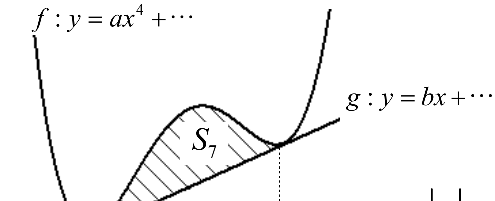


$$S_5=\frac{|a|}{12}\left(\beta-\alpha\right)^3$$

２接線の交点の座標は$\frac{\alpha+\beta}{2}$



$$S_6=\frac{|a|}{12}\left(\beta-\alpha\right)^4$$



$$S_7=\frac{|a|}{30}\left(\beta-\alpha\right)^5$$

これらの式は，表面の方法で導くことが可能です。しっかりマスターしておきましょう！