特殊な関数の極限の確認

★ ちょっと特殊な関数の極限を確認しておこう

以下にあげる関数の極限は形は特殊ですが大事な関数の極限が並んでいます。
それぞれ，なぜなのか証明をしてみるとよりいっそう理解できるでしょう。

$$\lim_{x\to a}|x|=|a|$$
$$\lim_{x\to a}x^k=a^k$$
$$\lim_{x\to a}\frac{1}{x^k}=\frac{1}{a^k}\ (a\neq 0)$$

$$\lim_{x\to 1}\frac{x^n-1}{x-1}=n$$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{x^n}{n!}=0$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{(1+x)^n-1}{x}=n$$

$$\lim_{x\to a}\sin x=\sin a$$
$$\lim_{x\to a}\cos x=\cos a$$

$$\lim_{x\to 0}x\cdot\sin\frac{1}{x}=0$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=1$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin ax}{ax}=1$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin ax}{bx}=\frac{a}{b}$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{x^2}=\frac{1}{2}$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{\tan x}{x}=1$$

$$\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x=e$$

$$\lim_{x\to 0}(1+x)^{\frac{1}{x}}=e$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{\log(1+x)}{x}=1$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{e^x-1}{x}=1$$

$$\lim_{x\to+\infty}e^{-x}\cdot\cos x=0$$

$$\lim_{x\to\infty}\frac{\log x}{x}=0$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{a^x-1}{x}=\log a\ (a>0)$$

$$\lim_{x\to\infty}\frac{e^x}{x^n}=\infty$$

$$\lim_{x\to+0}x\log x=0$$

特に □ □ で囲まれた極限は重要です！しっかり押さえておきましょう。

確認 特殊な関数の極限の確認

★ ちょっと特殊な関数の極限の証明方法を確認しておこう

$$\lim_{x\to1}\frac{x^n-1}{x-1}=\lim_{x\to1}\frac{(x-1)\left(x^{n-1}+x^{n-2}+\cdots+1\right)}{x-1}=\lim_{x\to1}\left(x^{n-1}+x^{n-2}+\cdots+1\right)=1+1+\cdots+1=n$$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{x^n}{n!}=\lim_{n\to\infty}\frac{x}{1}\cdot\frac{x}{2}\cdot\frac{x}{3}\cdot\cdots\cdot\frac{x}{n}=0$$

$t=1+x$ とおくと $\displaystyle\lim_{x\to0}\frac{(1+x)^n-1}{x}=\lim_{t\to1}\frac{t^n-1}{t-1}=n$

$(1+x)^n-1=\left\{(1+x)-1\right\}\left\{(1+x)^{n-1}+(1+x)^n+\cdots+1\right\}=x\left\{(1+x)^{n-1}+(1+x)^n+\cdots+1\right\}$ としてもよい

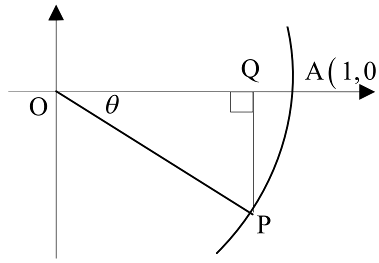
$$\left|\sin x-\sin a\right|=\left|\underbrace{2\cos\frac{x+a}{2}}_{1\text{より小さい}}\sin\frac{x-a}{2}\right|\leqq2\left|\sin\frac{x-a}{2}\right|$$

右図より　$\mathrm{PQ}=\left|\sin\theta\right|,\ \overset{\frown}{\mathrm{PA}}=\left|\theta\right|,\ \mathrm{PQ}\leqq\overset{\frown}{\mathrm{PA}}$　なので $\left|\sin\theta\right|\leqq\left|\theta\right|$

$0\leqq\left|\sin\theta-\sin a\right|\leqq2\left|\sin\frac{x-a}{2}\right|\leqq2\left|\frac{x-a}{2}\right|=\left|x-a\right|$

$x\to a$ のとき，$\left|x-a\right|\to0$　$\therefore\displaystyle\lim_{x\to a}\left|\sin x-\sin a\right|=0$　なので　$\displaystyle\lim_{x\to a}\sin x=\sin a$

また，$\cos x=\sin\left(x+\frac{\pi}{2}\right)$　より　$\displaystyle\lim_{x\to a}\cos x=\cos a$



$0\leqq\left|\sin\frac{1}{x}\right|\leqq1$ より，$0\leqq\left|x\cdot\sin\frac{1}{x}\right|\leqq\left|x\right|$　$\displaystyle\lim_{x\to0}\left|x\right|=0$ よりはさみうちの原理から $\displaystyle\lim_{x\to0}x\cdot\sin\frac{1}{x}=0$

関数 $f(x)=\dfrac{\sin x}{x}$ は偶関数であるので右側極限値だけを確かめればよい。

図において面積を比較すると，

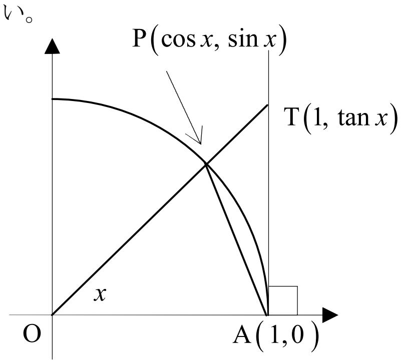
△OAP の面積 ＜ 扇形 OAP の面積 ＜ △OAT の面積

これを偏角 x で表すと $\dfrac{\sin x}{2}<\dfrac{x}{2}<\dfrac{\tan x}{2}=\dfrac{\sin x}{2\cos x}$

$\sin x>0$ より $\dfrac{2}{\sin x}$ をかけると　$1<\dfrac{x}{\sin x}<\dfrac{1}{\cos x}$

$\therefore\ \cos x<\dfrac{\sin x}{x}<1$

$\displaystyle\lim_{x\to+0}\cos x=1$ であるから $\displaystyle\lim_{x\to+0}\frac{\sin x}{x}=1$



$$\lim_{x\to0}\frac{\sin ax}{bx}=\lim_{x\to0}\frac{a}{b}\cdot\frac{\sin ax}{ax}=\frac{a}{b}\cdot1=\frac{a}{b}$$

$$\lim_{x\to0}\frac{1-\cos x}{x^2}=\lim_{x\to0}\frac{(1-\cos x)(1+\cos x)}{x^2(1+\cos x)}=\lim_{x\to0}\frac{1-\cos^2x}{x^2(1+\cos x)}=\lim_{x\to0}\frac{\sin^2x}{x^2(1+\cos x)}=\lim_{x\to0}\left(\frac{\sin x}{x}\right)^2\cdot\frac{1}{(1+\cos x)}=\frac{1}{2}$$

$$\lim_{x\to0}\frac{\tan x}{x}=\lim_{x\to0}\frac{\sin x}{x\cos x}=\lim_{x\to0}\frac{\sin x}{x}\cdot\frac{1}{\cos x}=1$$

$$
\begin{aligned}
a_n &= \left(1+\frac{1}{n}\right)^n \\
&= {}_n\mathrm{C}_0 + {}_n\mathrm{C}_1\cdot\frac{1}{n} + {}_n\mathrm{C}_2\cdot\frac{1}{n^2} + {}_n\mathrm{C}_3\cdot\frac{1}{n^3} + \cdots + {}_n\mathrm{C}_n\cdot\frac{1}{n^n} \\
&= 1 + \frac{n}{1!}\cdot\frac{1}{n} + \frac{n(n-1)}{2!}\cdot\frac{1}{n^2} + \frac{n(n-1)(n-2)}{3!}\cdot\frac{1}{n^3} + \cdots + \frac{n(n-1)(n-2)\cdots\cdots 1}{n!}\cdot\frac{1}{n^n} \\
&= 1 + \frac{1}{1!}\cdot\frac{n}{n} + \frac{1}{2!}\cdot\frac{n(n-1)}{n^2} + \frac{1}{3!}\cdot\frac{n(n-1)(n-2)}{n^3} + \cdots + \frac{1}{n!}\cdot\frac{n(n-1)(n-2)\cdots\cdots 1}{n^n} \\
&\leqq 1 + 1 + \frac{1}{2!}\cdot + \frac{1}{3!} + \cdots + \frac{1}{n!} \\
&\leqq 1 + 1 + \frac{1}{2}\cdot + \frac{1}{2^2} + \cdots + \frac{1}{2^{n-1}} \\
&= 1 + \frac{1\cdot\left\{1-\left(\frac{1}{2}\right)^n\right\}}{1-\frac{1}{2}} = 3 - \frac{1}{2^{n-1}} \\
&< 3
\end{aligned}
$$

上に有界なので $\lim_{n\to\infty} a_n$ が存在する。この値を e と定義する($\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n = e$)

$n=[x]$ $(x \geqq 1)$ とすると $n \leqq x < n+1$ より $\frac{1}{n+1} < \frac{1}{x} < \frac{1}{n}$ $1+\frac{1}{n+1} < 1+\frac{1}{x} < 1+\frac{1}{n}$ $\left(1+\frac{1}{n+1}\right)^n < \left(1+\frac{1}{x}\right)^x < \left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1}$

$x\to\infty$ のとき $n\to\infty$ （追い越し禁止）なので

$\left(1+\frac{1}{n+1}\right)^n = \left(1+\frac{1}{n+1}\right)^{n+1}\left(1+\frac{1}{n+1}\right)^{-1} \to e$ $\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1} = \left(1+\frac{1}{n}\right)^n\left(1+\frac{1}{n}\right)^1 \to e$ $\therefore \lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x = e$

$$\lim_{x\to 0}(1+x)^{\frac{1}{x}} = \lim_{t\to\infty}\left(1+\frac{1}{t}\right)^t = e$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{\log(1+x)}{x} = \lim_{x\to 0}\frac{1}{x}\log(1+x) = \lim_{x\to 0}\log(1+x)^{\frac{1}{x}} = \log e = 1$$

$e^x - 1 = t$ とおくと $e^x = t+1$ $\therefore x = \log(t+1)$

$$\lim_{x\to 0}\frac{e^x-1}{x} = \lim_{x\to 0}\frac{t}{\log(t+1)} = \lim_{x\to 0}\frac{1}{\log(t+1)^{\frac{1}{t}}} = 1$$

$a^x - 1 = t$ とおくと $a^x = t+1$ $\therefore x = \log_a(t+1)$

$$\lim_{x\to 0}\frac{a^x-1}{x} = \lim_{x\to 0}\frac{t}{\log_a(t+1)} = \lim_{x\to 0}\frac{t}{\frac{\log(t+1)}{\log a}} = \lim_{x\to 0}\frac{\log a}{\log(t+1)^{\frac{1}{t}}} = \log a$$

$\log x = t$ とおくと $x = e^t$ $\lim_{x\to\infty}\frac{\log x}{x} = \lim_{t\to\infty}\frac{t}{e^t} = 0$ *q.e.d.*

$x>0$ のとき $\log x < \sqrt{x}$ $x>1$ のとき $0 < \frac{\log x}{x} < \frac{1}{\sqrt{x}}$

$\lim_{x\to\infty}\frac{1}{\sqrt{x}} = 0$ なので $\lim_{x\to\infty}\frac{\log x}{x} = 0$ *q.e.d.*

$x = \frac{1}{t}$ とおくと

$$\lim_{x\to +0} x\log x = \lim_{t\to\infty}\frac{\log\frac{1}{t}}{t} = \lim_{t\to\infty}\frac{-\log t}{t} = 0$$

$0 \leqq |\cos x| \leqq 1$ より， $0 \leqq |e^{-x}\cos x| \leqq \frac{1}{e^x}$

$\lim_{x\to\infty} e^{-x} = 0$ よりはさみうちの原理から $\lim_{x\to\infty} e^{-x}\cos x = 0$