数列の極限の確認

★ 数列の極限に関する基本事項を確認しておこう

無限数列の極限

収束する … $\lim_{n\to\infty} a_n = \alpha$ （一定）

発散する
- 正の無限大に発散する … $\lim_{n\to\infty} a_n = \infty$
- 負の無限大に発散する … $\lim_{n\to\infty} a_n = -\infty$
- 振動する

基本的な例）$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0$， $\lim_{n\to\infty} n^2 = \infty$， $\lim_{n\to\infty}(-n) = -\infty$

極限値の性質

数列 $\{a_n\}, \{b_n\}$ について，

$\lim_{n\to\infty} a_n = \alpha$, $\lim_{n\to\infty} b_n = \beta$ であるとき

1． $\lim_{n\to\infty} ka_n = k\alpha$ （k は定数）

2． $\lim_{n\to\infty}(a_n \pm b_n) = \alpha \pm \beta$

3． $\lim_{n\to\infty} a_n b_n = \alpha\beta$

4． $\beta \neq 0$ のとき， $\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = \frac{\alpha}{\beta}$

不定形の演算例

n の次数の最も高い項をくくりだす： $\lim_{n\to\infty}(an^2 + bn + c) = \lim_{n\to\infty} n^2\left(a + \frac{b}{n} + \frac{c}{n^2}\right)$

分数型のときは分母の最高次の項に注目： $\lim_{n\to\infty} \frac{n^2 + 2n}{3n^2 - n + 2} = \lim_{n\to\infty} \frac{1 + \frac{2}{n}}{3 - \frac{1}{n} + \frac{2}{n^2}} = \frac{1}{3}$

√を含む極限は有理化を： $\lim_{n\to\infty}\left(\sqrt{n^2 + 3n} - n\right) = \lim_{n\to\infty} \frac{\left(\sqrt{n^2 + 3n}\right)^2 - n^2}{\sqrt{n^2 + 3n} + n}$， $\lim_{n\to\infty} \frac{2}{\sqrt{n^2 + n} - n} = \lim_{n\to\infty} \frac{2\left(\sqrt{n^2 + n} + n\right)}{\left(\sqrt{n^2 + n}\right)^2 - n^2}$

不定形

$\frac{\infty}{\infty}$, $\frac{0}{0}$, $0 \times \infty$, $\infty - \infty$

などは式変形の工夫が必要

極限の大小関係

1． $a_n \leqq b_n$ のとき，

$\lim_{n\to\infty} a_n = \alpha$, $\lim_{n\to\infty} b_n = \beta$ ならば $\alpha \leqq \beta$

（数列の極限の追い越し禁止）

2． $a_n \leqq c_n \leqq b_n$ のとき，

$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} b_n = \alpha$ ならば $\lim_{n\to\infty} c_n = \alpha$

（はさみうちの原理）

無限級数の極限

無限級数： $a_1 + a_2 + \cdots + a_n + \cdots = \sum_{n=1}^{\infty} a_n$

の部分和 $S_n = a_1 + a_2 + \cdots + a_n$ について

$\lim_{n\to\infty} S_n$ が有限な値 ⇒ 収束するといい，その値を和という

$\lim_{n\to\infty} S_n$ が有限な値でない ⇒ 無限級数は発散するという

※ $\lim_{n\to\infty} S_n = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} a_k$ とかけるので数列の知識を使おう！

無限等比数列 $\{r^n\}$ の極限

- $r > 1$ のとき $\lim_{n\to\infty} r^n = \infty$
- $r = 1$ のとき $\lim_{n\to\infty} r^n = 1$
- $|r| < 1$ のとき $\lim_{n\to\infty} r^n = 0$
- $r \leqq -1$ のとき $\{r^n\}$ は振動

「極限を調べよ」といわれたら，場合分けして調べること

計算するときには $|r|$ が最大のものに注目して変形をする！

無限等比級数の極限

$a \neq 0$ のとき

$a + ar + \cdots + ar^{n-1} + \cdots = \sum_{n=1}^{\infty} ar^{n-1}$ は

- $|r| < 1$ のとき
  収束し，和は $\frac{a}{1-r}$
- $|r| \geqq 1$ のとき 発散する

無限級数の和の性質

無限級数が $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = S$, $\sum_{n=1}^{\infty} b_n = T$ となるとき，

1． $\sum_{n=1}^{\infty} ka_n = kS$ ただし， k は定数

2． $\sum_{n=1}^{\infty}(a_n \pm b_n) = S \pm T$

無限級数が収束するための必要条件

無限級数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ が収束する ⇒ $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$

$\lim_{n\to\infty} a_n \neq 0$ ⇒ 無限級数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ は発散する

※ 証明や級数の収束・発散を調べるときに活用を