○数列の極限

数列の極限
- 収束 $\lim_{n\to\infty} a_n = \alpha$ 極限値はα
- 発散
  - $\lim_{n\to\infty} a_n = \infty$ 正の無限大に発散
  - $\lim_{n\to\infty} a_n = -\infty$ 負の無限大に発散
  - 振動 極限はない

○極限値の性質

数列 $\{a_n\}, \{b_n\}$ について，$\lim_{n\to\infty} a_n = \alpha, \lim_{n\to\infty} b_n = \beta$ であるとき

1． $\lim_{n\to\infty} ka_n = k\alpha$　（k は定数）

2． $\lim_{n\to\infty}(a_n \pm b_n) = \alpha \pm \beta$

3． $\lim_{n\to\infty} a_n b_n = \alpha\beta$

4． $\beta \neq 0$ のとき，$\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = \frac{\alpha}{\beta}$

○極限の大小関係

１．$a_n \leqq b_n$ のとき，

$\lim_{n\to\infty} a_n = \alpha,\ \lim_{n\to\infty} b_n = \beta$ ならば $\alpha \leqq \beta$

（数列の極限の追い越し禁止）

２．$a_n \leqq c_n \leqq b_n$ のとき，

$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} b_n = \alpha$ ならば $\lim_{n\to\infty} c_n = \alpha$

（はさみうちの原理）

○不定形の演算例

不定形

$$\frac{\infty}{\infty},\ \frac{0}{0},\ 0\times\infty,\ \infty-\infty$$

などは式変形の工夫が必要

n の次数の最も高い項をくくりだす：

$$\lim_{n\to\infty}\left(an^2+bn+c\right)=\lim_{n\to\infty}n^2\left(a+\frac{b}{n}+\frac{c}{n^2}\right)$$

分数型のときは分母の最高次の項に注目：

$$\lim_{n\to\infty}\frac{n^2+2n}{3n^2-n+2}=\lim_{n\to\infty}\frac{1+\frac{2}{n}}{3-\frac{1}{n}+\frac{2}{n^2}}=\frac{1}{3}$$

√を含む極限は有理化を：

$$\lim_{n\to\infty}\left(\sqrt{n^2+3n}-n\right)=\lim_{n\to\infty}\frac{\left(\sqrt{n^2+3n}\right)^2-n^2}{\sqrt{n^2+3n}+n},$$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{2}{\sqrt{n^2+n}-n}=\lim_{n\to\infty}\frac{2\left(\sqrt{n^2+n}+n\right)}{\left(\sqrt{n^2+n}\right)^2-n^2}$$

○無限等比数列$\{r^n\}$の極限

・$r > 1$のとき　$\lim_{n \to \infty} r^n = \infty$

・$r = 1$のとき　$\lim_{n \to \infty} r^n = 1$

・$|r| < 1$のとき　$\lim_{n \to \infty} r^n = 0$

・$r \leqq -1$のとき　振動……極限はない

数列$\{r^n\}$が収束するための必要十分条件は

$$-1 < r \leqq 1$$