関数の極限の確認

★ 関数の極限に関する基本事項を確認しておこう

関数の極限

「$x(\neq a)$ が限りなく a に近づくとき，
$f(x)$ の値が限りなく一定の値 α に近づく」
↓
「$x \to a$ のとき，$f(x)$ は α に収束する」
↓
「$\displaystyle\lim_{x \to a} f(x) = \alpha$ 」

※ この α を $x \to a$ のときの $f(x)$ の極限値という

極限値の四則

$\displaystyle\lim_{x \to \infty} f(x) = \alpha$, $\displaystyle\lim_{x \to \infty} g(x) = \beta$ であるとき

1．$\displaystyle\lim_{x \to a} kf(x) = k\alpha$ （k は定数）

2．$\displaystyle\lim_{x \to a} (f(x) \pm g(x)) = \alpha \pm \beta$

3．$\displaystyle\lim_{x \to a} f(x)g(x) = \alpha\beta$

4．$\beta \neq 0$ のとき，$\displaystyle\lim_{x \to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\alpha}{\beta}$

右側極限・左側極限

左側から a に近づく（$x \to a-0$） ・ 右側から a に近づく（$x \to a+0$）

a

※ $a=0$ のときは，$x \to +0$, $x \to -0$ とかく

一般に $\displaystyle\lim_{x \to a} f(x) = \alpha \iff \lim_{x \to a+0} f(x) = \lim_{x \to a-0} f(x) = \alpha$

（$\displaystyle\lim_{x \to a} f(x) = \alpha$ は，その近づき方に関係なく限りなく α に近づくことを示している）

また $\displaystyle\lim_{x \to a+0} f(x) \neq \lim_{x \to a-0} f(x)$ のとき，$\displaystyle\lim_{x \to a} f(x)$ は存在しない

関数の極限値の大小関係

1．a の近くで，$f(x) \leqq g(x)$ ならば，$\displaystyle\lim_{x \to a} f(x) \leqq \lim_{x \to a} g(x)$ すなわち $\alpha \leqq \beta$ ※ 追い越し禁止

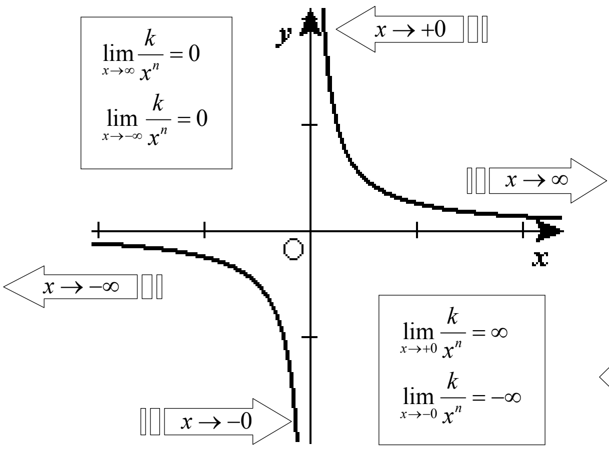
2．a の近くで，$f(x) \leqq h(x) \leqq g(x)$ かつ $\displaystyle\lim_{x \to a} f(x) = \lim_{x \to a} g(x) = \alpha$ ならば，$\displaystyle\lim_{x \to a} h(x) = \alpha$ ※ はさみうちの原理

注意 これらのことは，$x \to \infty$ や $x \to -\infty$ のときも成り立つ

基本的な極限値

$\displaystyle\lim_{x \to \infty} \frac{k}{x^n} = 0$

$\displaystyle\lim_{x \to -\infty} \frac{k}{x^n} = 0$



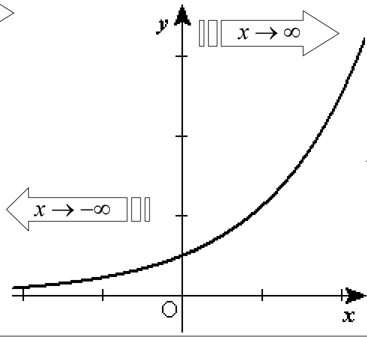
$\displaystyle\lim_{x \to +0} \frac{k}{x^n} = \infty$

$\displaystyle\lim_{x \to -0} \frac{k}{x^n} = -\infty$

$a>1$ のとき，

$\displaystyle\lim_{x \to \infty} a^x = \infty$

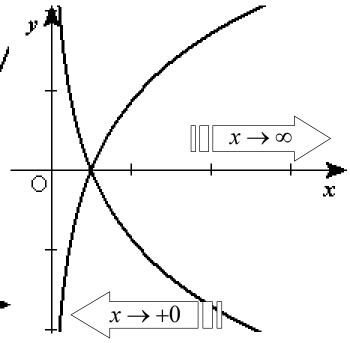
$\displaystyle\lim_{x \to -\infty} a^x = 0$



$a>1$ のとき，

$\displaystyle\lim_{x \to \infty} \log_a x = \infty$, $\displaystyle\lim_{x \to +0} \log_a x = -\infty$

$\displaystyle\lim_{x \to \infty} \log_a \frac{1}{x} = -\infty$, $\displaystyle\lim_{x \to +0} \log_a \frac{1}{x} = \infty$



計算のポイント

・分数型のときは最高次の項に注目！

・√ を含む極限は有理化を

・$\displaystyle\lim_{x \to a}$ は，$x-a=t$ とおくと $\displaystyle\lim_{t \to 0}$ に

・$\displaystyle\lim_{x \to -\infty}$ は，$x=-t$ とおくと $\displaystyle\lim_{t \to \infty}$ に

・$\displaystyle\lim_{x \to \infty} \frac{f(x)}{g(x)}$ が収束するためには，
（分母の次数）≧（分子の次数）

三角関数の極限

・$\displaystyle\lim_{x \to a} \sin x = \sin a$, $\displaystyle\lim_{x \to a} \cos x = \cos a$

・$\displaystyle\lim_{x \to 0} \frac{\sin x}{x} = 1$, $\displaystyle\lim_{x \to 0} \frac{\sin kx}{kx} = 1$, $\displaystyle\lim_{x \to 0} \frac{\sin ax}{bx} = \lim_{x \to 0} \frac{a}{b} \cdot \frac{\sin ax}{ax} = \frac{a}{b}$

・$1-\cos ax$ には $1+\cos ax$ をかけて処理

ネイピア数の極限

・$e = 1+1+\dfrac{1}{2!}+\dfrac{1}{3!}+\cdots = 2.718281828459\cdots$

・$\displaystyle\lim_{x \to \infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x = e$, $\displaystyle\lim_{x \to 0}(1+x)^{\frac{1}{x}} = e$