確認 不定積分の対応法のまとめ

■ 関数の特徴をとらえて不定積分をするために必要なことを確認しておこう

別紙「積分の戦略」も合わせて確認しよう！

□基本性質を利用する

●関数の定数倍および和，差の不定積分

$$\int\{kf(x)-lg(x)\}dx=k\int f(x)dx-l\int g(x)dx$$

（k, l は定数）

●部分分数分解を行うことで，分数式の和・差の形に

●三角関数の積和の公式や、半角の公式による次数下げ

（倍角の話にしていく）

□置換積分法や部分積分法を利用する

●**置換積分法**…被積分関数の形に応じた置き換え方で計算できることもあるので、定石は身に付けておこう。

●**部分積分法**～微分すると簡単になる関数や積分を繰り返しても同じ形になるときなどに活用。どちらを微分・積分するかは表などを使って見定めることがポイント。

例）

積分	$\frac{1}{2}x^2$	$\sin x$
	x	$\cos x$
微分	1	$-\sin x$

代表的な考え方

□不定積分の定義

● $\int f(x)\,dx=F(x)+C \Longleftrightarrow f(x)=F'(x)$

□基本的な関数の不定積分

● $\alpha \neq -1$ のとき $\int x^{\alpha}dx=\frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1}+C$

● $\int \frac{1}{x}dx=\log|x|+C$

● $\int \sin x\,dx=-\cos x+C$

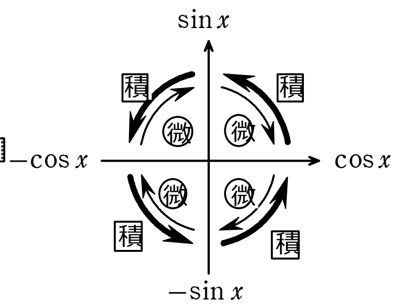
● $\int \cos x\,dx=\sin x+C$

● $\int \frac{dx}{\cos^2 x}=\tan x+C$

● $\int \frac{dx}{\sin^2 x}=-\frac{1}{\tan x}+C$

● $\int e^x dx=e^x+C$

● $\int a^x dx=\frac{a^x}{\log a}+C$



微分は 時計回り

積分は反時計回り

□分数関数のとき

① 分母が単項式

$\Longrightarrow$ 整式にして単項式ごとにみる

② $\dfrac{\text{分母の微分}}{\text{分母}}$

$\Longrightarrow$ 置換積分法で $\log|\text{分母}|$

③ 分母が多項式で

（分母の次数）$\leqq$（分子の次数）

$\Longrightarrow$ $A=B\times Q+R$ で次数下げ

④ 分母が因数分解可能

$\Longrightarrow$ 部分分数分解

⑤ $(ax+b)^n$ を含む

$\Longrightarrow$ $ax+b=t$ とおく

補足 $\dfrac{(\text{定数})}{(1\text{次式})}$ なら②の形へ

$\dfrac{(\text{定数})}{(2\text{次式})}$ の形の場合は分母の判別式 D から

[1] $D>0$

$\Rightarrow$ （分母）$=a(x-\alpha)(x-\beta)$ の形になるので部分分数分解へ

[2] $D=0$

$\Rightarrow$ （分母）$=a(x-\alpha)^2$ の形になるので置き換えで計算

[3] $D<0$

$\Rightarrow$ （分母）$=a\{(x-p)^2+q^2\}$ の形で高校数学の範囲外だが

$x-p=q\tan\theta$ とおいて置換積分法を利用する方法がある

□無理関数のとき

① 分母の有理化

② $\sqrt[n]{ax+b}$ を含む　$\Longrightarrow$　$\sqrt[n]{ax+b}=t$ とおく

③ $g'(x)\sqrt{g(x)}$ の形　$\Longrightarrow$　$g(x)=t$ または $\sqrt{g(x)}=t$ とおく

④ $\sqrt{x^2+A}$ の形　$\Longrightarrow$　$x+\sqrt{x^2+A}=t$ とおく

⑤ $\sqrt{a^2-x^2}$ の形　$\Longrightarrow$　$x=a\sin\theta$ とおく

（円の形に帰着させる場合も）

□三角関数のとき

① $f(\sin\theta)\cdot\cos\theta$ や $f(\cos\theta)\cdot\sin\theta$

といった $f(●)\cdot●'$ の形

$\Longrightarrow$　$●=t$ をイメージ（置き換えなくてもよいときも）

② 部分積分法を活用

③ 次数を下げて、倍角の形に

④ 漸化式の利用

⑤ $\tan\dfrac{x}{2}=t$ の利用

（ワイエルシュトラス置換、半角正接置換）

$$\Longrightarrow\quad \sin x=\frac{2t}{1+t^2},\ \cos x=\frac{1-t^2}{1+t^2},\ dx=\frac{2}{1+t^2}dt$$

$$\sin^2\alpha=\frac{1-\cos 2\alpha}{2}=\frac{1}{2}(1-\cos 2\alpha)$$

$$\cos^2\alpha=\frac{1+\cos 2\alpha}{2}=\frac{1}{2}(1+\cos 2\alpha)$$

$$\sin\alpha\cos\alpha=\frac{\sin 2\alpha}{2}$$

$$\sin\alpha\cos\beta=\frac{1}{2}\{\sin(\alpha+\beta)+\sin(\alpha-\beta)\}$$

$$\cos\alpha\sin\beta=\frac{1}{2}\{\sin(\alpha+\beta)-\sin(\alpha-\beta)\}$$

$$\cos\alpha\cos\beta=\frac{1}{2}\{\cos(\alpha+\beta)+\cos(\alpha-\beta)\}$$

$$\sin\alpha\sin\beta=-\frac{1}{2}\{\cos(\alpha+\beta)-\cos(\alpha-\beta)\}$$

□指数関数・対数関数のとき

① $f(●)\cdot●'$ の形

$\Longrightarrow$　$●=t$ をイメージ（置き換えなくてもよいときも）

② 部分積分法を活用

$\Longrightarrow$　$\displaystyle\int\log x\,dx=x\log x-x+C$ は公式レベル！

③ 漸化式の利用

□指数関数×三角関数のとき

① 部分積分法の活用

$\Longrightarrow$ 同形出現からの等式変形

$\Longrightarrow$ 同形のペアを作って連立方程式の場合も

※ このほかにも被積分関数の形に応じて置き換えをすることで計算できる場合もあるので、定石を身に付けた上で、どう解くべきか考える力を付けていこう。

※ 右の（別紙）「積分の戦略の確認」も参考にしてみよう。