



# 導関数の基本事項の確認

★ 基本となる導関数はしっかり押さえておこう

関数  $f(x)$  が、ある区間のすべての  $x$  の値で微分可能であるとき、 $f(x)$  はその区間で微分可能であるという。このとき、その区間における  $x$  のおのおのの値  $a$  に対して  $f'(a)$  を対応させると、1つの新しい関数が得られる。この新しい関数をもとの関数  $f(x)$  の導関数といい、 $f'(x)$ ,  $y'$ ,  $\{f(x)\}'$ ,  $\frac{dy}{dx}$  などで表す。また、関数  $y = f(x)$  からその導関数  $f'(x)$  を求めることを、 $f(x)$  を微分するという。関数  $y = f(x)$  の導関数  $f'(x)$  は、次の式で定義される。

$$f'(x) = \lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} \quad \left( = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x} \right)$$

## 基本となる微分の公式

関数  $f(x)$ ,  $g(x)$  が微分可能なとき

- $\{kf(x)\}' = kf'(x)$
- $\{f(x) \pm g(x)\}' = f'(x) \pm g'(x)$
- $\{f(x)g(x)\}' = f'(x)g(x) + f(x)g'(x)$
- $\left\{ \frac{f(x)}{g(x)} \right\}' = \frac{f'(x)g(x) - f(x)g'(x)}{\{g(x)\}^2}$

特に  $\left\{ \frac{1}{g(x)} \right\}' = -\frac{g'(x)}{\{g(x)\}^2}$

おまけ

$$\{f(x)g(x)h(x)\}' = f'(x)g(x)h(x) + f(x)g'(x)h(x) + f(x)g(x)h'(x)$$

## 合成関数の導関数

関数  $u = f(x)$ ,  $y = g(u)$  の合成関数  $y = g(f(x))$  において  $f, g$  が微分可能であるとき

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \cdot \frac{du}{dx}$$

(おきかえて微分, おきかえたのを微分)

## 逆関数の導関数

関数  $u = f(x)$  が微分可能であるとき

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{\frac{dx}{dy}}$$

## 媒介変数で表された関数の導関数

関数  $x = f(t)$ ,  $y = g(t)$  とあらわされるとき

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}} = \frac{g'(t)}{f'(t)}$$

## 代表的な導関数

$$(x^n)' = nx^{n-1}$$

$$\{c\}' = 0 \quad c \text{ は定数}$$

$$\left( \frac{1}{\sqrt{x}} \right)' = -\frac{1}{2x\sqrt{x}}$$

$$(\sqrt{x})' = \frac{1}{2\sqrt{x}}$$

$$(e^x)' = e^x$$

$$(a^x)' = a^x \log a \quad (a > 0, a \neq 1)$$

$$(\log x)' = \frac{1}{x}$$

$$(\log_a x)' = \frac{1}{x} \log_a e$$

$$(x^x)' = x^x (1 + \log x) \quad (x > 0, x \neq 1)$$

$$(\sin x)' = \cos x$$

$$(\cos x)' = -\sin x$$

$$(\tan x)' = \frac{1}{\cos^2 x}$$

## いろいろな導関数

セカント (正割)

$$\sec \theta = \frac{1}{\cos \theta}$$

コセカント (余割)

$$\operatorname{cosec} \theta = \frac{1}{\sin \theta}$$

コタンジェント (余接)

$$\cot \theta = \frac{1}{\tan \theta}$$

$$(\sec x)' = \tan x \cdot \sec x$$

$$(\operatorname{cosec} x)' = -\cot x \cdot \operatorname{cosec} x$$

$$(\cot x)' = -\frac{1}{\sin^2 x}$$

$$(\sin^{-1} x)' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \quad \left( -\frac{\pi}{2} < y < \frac{\pi}{2} \right)$$

$$(\cos^{-1} x)' = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \quad (0 < y < \pi)$$

$$(\tan^{-1} x)' = \frac{1}{1+x^2} \quad \left( -\frac{\pi}{2} < y < \frac{\pi}{2} \right)$$

$$(\cot^{-1} x)' = -\frac{1}{1+x^2} \quad \left(-\frac{\pi}{2} < y < \frac{\pi}{2}\right)$$

$$(\sec^{-1} x)' = -\frac{1}{x\sqrt{x^2-1}} \quad (0 < y < \pi)$$

$$(\operatorname{cosec}^{-1} x)' = -\frac{1}{x\sqrt{x^2-1}} \quad \left(-\frac{\pi}{2} < y < \frac{\pi}{2}\right)$$

$$(\sin x)' = (\cos x) \cdot 1 - (\sin x) \cdot 0 = \cos x$$

任意の実数  $a$  で

$$\frac{f(x) - f(a)}{x - a} = \frac{x^n - a^n}{x - a} = x^{n-1}a^0 + x^{n-2}a^1 + \dots + xa^{n-2} + x^0a^{n-1}$$

ここで  $x \rightarrow a$  とすると  $f'(a) = na^{n-1}$

$$f(x) = c \text{ (定数関数)} \quad f'(x) = 0$$

$$f'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{c - c}{h} = 0$$

$\cos x = \sin\left(x + \frac{\pi}{2}\right)$ ,  $\cos\left(x + \frac{\pi}{2}\right) = -\sin x$  と合成関数の合成関数の公式より

$$(\cos x)' = \left\{ \sin\left(x + \frac{\pi}{2}\right) \right\}' = \cos\left(x + \frac{\pi}{2}\right) \cdot \left(x + \frac{\pi}{2}\right)' = -\sin x$$

$\tan x = \frac{\sin x}{\cos x}$  であるから, 商の導関数の公式を用いて

$$(\tan x)' = \frac{(\sin x)' \cos x - \sin x (\cos x)'}{\cos^2 x} = \frac{\cos^2 x + \sin^2 x}{\cos^2 x} = \frac{1}{\cos^2 x}$$

$$(e^x)' = e^x$$

任意の実数  $a$  で

$$\frac{f(a+h) - f(a)}{h} = \frac{e^{a+h} - e^a}{h} = e^a \cdot \frac{e^h - 1}{h} \quad \dots *$$

ここで  $t = e^h - 1$  とおくと,  $h = \log(1+t)$ ,  $x \rightarrow 0 \Rightarrow t \rightarrow 0$  であるので

教  $a > 0, a \neq 1$  とする。

$y = a^x$  の両辺の自然対数をとると  $\log y = x \log a$

両辺を  $x$  で微分して  $\frac{y'}{y} = \log a$

よって  $y' = y \log a$  すなわち  $(a^x)' = a^x \log a$

特に,  $a = e$  のとき,  $\log e = 1$  であるから

$$(e^x)' = e^x$$

