確認 半角正接置換（ワイエルシュトラス置換）のまとめ

■ **被積分関数に三角関数を含む場合よりは、有理関数のみの場合の方が計算しやすい場合が多い。**
そこでやや強引ではあるが有理関数のみに変換する方法を身に付けよう。

$$\int f(\sin x,\ \cos x)\,dx=\int f\left(\frac{2t}{1+t^2},\ \frac{1-t^2}{1+t^2}\right)\frac{2}{1+t^2}\,dt$$

●準備として…

名前の通り $t=\tan\dfrac{x}{2}$ とおく。

【 dx 】 両辺を x で微分すると $\dfrac{dt}{dx}=\dfrac{1}{\cos^2\frac{x}{2}}\cdot\left(\dfrac{x}{2}\right)'=\dfrac{1+\tan^2\frac{x}{2}}{2}=\dfrac{1+t^2}{2}$

よって $dx=\dfrac{2}{1+t^2}dt$

※ $1+\tan^2\dfrac{x}{2}=\dfrac{1}{\cos^2\frac{x}{2}}$ より

$$\cos^2\frac{x}{2}=\frac{1}{1+\tan^2\frac{x}{2}}=\frac{1}{1+t^2}$$

【 $\cos x$ 】 ２倍角の公式より

$$\cos x=2\cos^2\frac{x}{2}-1$$

$$=\frac{2}{1+\tan^2\frac{x}{2}}-1=\frac{2}{1+\tan^2\frac{x}{2}}-\frac{1+\tan^2\frac{x}{2}}{1+\tan^2\frac{x}{2}}$$

$$=\frac{1-\tan^2\frac{x}{2}}{1+\tan^2\frac{x}{2}}=\frac{1-t^2}{1+t^2}$$

※ ２倍角の公式より

$$\tan x=\frac{2\tan\frac{x}{2}}{1-\tan^2\frac{x}{2}}=\frac{2t}{1-t^2}$$

【 $\sin x$ 】 ２倍角の公式と相互関係の性質より

$$\sin x=\underline{\underline{2\sin\frac{x}{2}}}\cos\frac{x}{2}=\underline{\underline{2\tan\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2}}}\cdot\cos\frac{x}{2}$$

$$=2\tan\frac{x}{2}\cdot\cos^2\frac{x}{2}=\frac{2t}{1+t^2}$$

別解

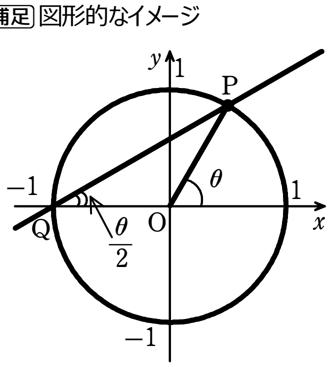
相互関係の性質より

$$\sin x=\tan x\cdot\cos x$$

$$=\frac{2t}{1-t^2}\cdot\frac{1-t^2}{1+t^2}$$

$$=\frac{2t}{1+t^2}$$

補足 図形的なイメージ



円周角の定理により図のような角の関係性となることから

単位円 $x^2+y^2=1$ と直線 $y=\tan\dfrac{\theta}{2}\cdot(x+1)=t\cdot(x+1)$ の共有点を

考える。そこで連立すると

$x^2+t^2(x+1)^2=1$ であるから $(1+t^2)x^2+2t^2x+t^2-1=0$

図から $x=-1$ を共有点にもつことが明らかであるから $(x+1)$ を因数にもつ。

よって $(x+1)\{(1+t^2)x+t^2-1\}=0$ となり

共有点は $\left(\dfrac{1-t^2}{1+t^2},\ \dfrac{2t}{1+t^2}\right)$ となる。

$\mathrm{P}(\cos\theta,\ \sin\theta)$ と表せることから

$$\sin\theta=\frac{1-t^2}{1+t^2},\ \cos\theta=\frac{2t}{1+t^2}$$

このようにして $\boxed{dx=\dfrac{2}{1+t^2}dt\ ,\ \sin x=\dfrac{2t}{1+t^2},\ \cos x=\dfrac{1-t^2}{1+t^2}}$ が得られる。これらを用いて置換をしてみよう。