確認 King Property のまとめ

■ どこの誰が呼び出したか由来が不明なKing Property（キングプロパティ）

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^b f(a+b-x)\,dx$$

その導出の仕方や活用方法を確認しよう。

■導出方法

$t=a+b-x$ とおくと　$x=a+b-t$ より　$\dfrac{dx}{dt}=-1$　$\therefore$　$dx=(-1)\cdot dt$

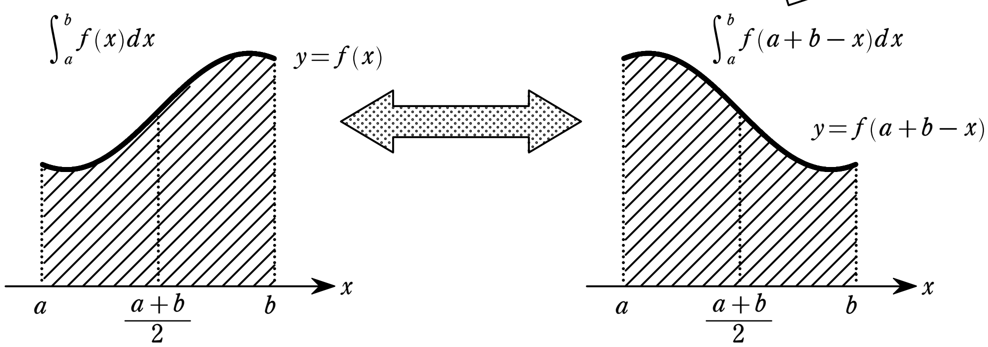
$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_b^a f(a+b-t)\cdot(-1)\,dt$$

x	$a \to b$
t	$b \to a$

$$= \int_a^b f(a+b-t)\,dt$$

$$= \int_a^b f(a+b-x)\,dx$$

図形的には $y=f(x)$ のグラフを $x=\dfrac{a+b}{2}$ に関して対称（鏡映し）にしたものなので成立することがわかる



■King Propertyから…

$A=B$ のとき　$A=\dfrac{A+B}{2}$ であるから

$$\int_a^b f(x)\,dx = \frac{1}{2}\left\{\int_a^b f(x)\,dx + \int_a^b f(a+b-x)\,dx\right\}$$

$$\boxed{\int_a^b f(x)\,dx = \frac{1}{2}\int_a^b \{f(x)+f(a+b-x)\}\,dx}$$

また，下端を 0 とすると（ $a=0,\ b=a$ ）

$$\boxed{\int_0^a f(x)\,dx = \int_0^a f(a-x)\,dx}$$

である

$I=\displaystyle\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^b f(a+b-x)\,dx$

とすると

$2I=\displaystyle\int_a^b f(x)\,dx + \int_a^b f(a+b-x)\,dx$

となるので

$2I=\displaystyle\int_a^b \{f(x)+f(a+b-x)\}\,dx$

とも表される

■活用のタイミングと具体例

○三角関数が扱われているとき（もちろん三角関数以外のときにも使える）

⇒積分区間が 0 から π までだと $\displaystyle\int_0^{\pi} f(x)\,dx=\int_0^{\pi} f(\pi-x)\,dx$となるが

補角の公式により $\sin(\pi-x)=-\sin x$，$\cos(\pi-x)=\cos x$ を活用すると同型が生じる

⇒ 消去できる部分や約分できる部分ができあがる

○$\displaystyle\int_a^b\{f(x)+f(a+b-x)\}dx$ において，$f(x)+f(a+b-x)$ が簡単な形になるときも活用できる

例題）本来は前半に誘導があって解く問題であるけども…

(4) 定積分 $\displaystyle\int_{-\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{3}}\frac{t\sin t}{1+\pi^{\sin^3 t}}dt$ の値を求めよ。

【横浜国立大2022】

$$I=\int_{-\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{3}}\frac{t\sin t}{1+\pi^{\sin^3 t}}dt$$ とおくと

$$2I=\int_{-\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{3}}\left\{\frac{t\sin t}{1+\pi^{\sin^3 t}}+\frac{-t\sin(-t)}{1+\pi^{\sin^3(-t)}}\right\}dt$$

$$=\int_{-\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{3}}\left(\frac{t\sin t}{1+\pi^{\sin^3 t}}+\frac{t\sin t}{1+\pi^{-\sin^3 t}}\right)dt$$

$$=\int_{-\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{3}}\left(\frac{t\sin t}{1+\pi^{\sin^3 t}}+\frac{\pi^{\sin^3 t}t\sin t}{\pi^{\sin^3 t}+1}\right)dt$$

$$=\int_{-\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{3}}\frac{\left(1+\pi^{\sin^3 t}\right)t\sin t}{1+\pi^{\sin^3 t}}dt$$

$$=\int_{-\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{3}}t\sin t\,dt$$

セ	$\frac{t^2}{2}$	$-\cos t$
	t	$\sin t$
ビ	1	$\cos t$

$$=\Big[-t\cos t\Big]_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}+\int_{-\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{3}}\cos t\,dt$$

$$=\Big[-t\cos t+\sin t\Big]_{-\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{3}}$$

$$=\left(-\frac{\pi}{6}+\frac{\sqrt{3}}{2}\right)-\left(\frac{\pi}{6}-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$$

$$=2\left(-\frac{\pi}{6}+\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$$

ゆえに

$$\int_{-\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{3}}\frac{t\sin t}{1+\pi^{\sin^3 t}}dt=-\frac{\pi}{6}+\frac{\sqrt{3}}{2}$$

関数 $f(x)=\dfrac{\sin^2 x}{1+e^{-x}}$ について，次の値を求めよ。

(2) $\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\,dx$

【信州大2021】

$$I=\int_{-\pi}^{\pi}\frac{\sin^2 x}{1+e^{-x}}dx$$ とおくと

$$2I=\int_{-\pi}^{\pi}\left\{\frac{\sin^2 x}{1+e^{-x}}+\frac{\sin^2(-x)}{1+e^{-(-x)}}\right\}dx$$

$$=\int_{-\pi}^{\pi}\left(\frac{\sin^2 x}{1+e^{-x}}+\frac{\sin^2 x}{1+e^{x}}\right)dx$$

$$=\int_{-\pi}^{\pi}\left(\frac{e^x\sin^2 x}{e^x+1}+\frac{\sin^2 x}{1+e^x}\right)dx$$

$$=\int_{-\pi}^{\pi}\frac{(e^x+1)\sin^2 x}{e^x+1}dx$$

$$=\int_{-\pi}^{\pi}\sin^2 x\,dx$$

偶関数

$$=2\int_0^{\pi}\sin^2 x\,dx$$

半角の公式

$$=\int_0^{\pi}(1-\cos 2x)\,dx$$

$$=\left[x-\frac{1}{2}\sin 2x\right]_0^{\pi}$$

$$=\pi$$

したがって $\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\,dx=\frac{\pi}{2}$