確認 ２変数関数の扱い方のまとめ

■ ２変数の不等式については条件を用いて文字を減らしたり、平方完成をしたりすることで証明する方法もあるが、他にも２変数 a, b の不等式を扱うには、次のような方法が考えられる

① $f(a)>f(b)$ の形に変形

ポイント：式変形をすることで両辺が共通の関数 $f(x)$ で $f(a)>f(b)$ と表すことができればあとは $f(x)$ が単調増加・単調減少となることを調べればよい

② おき換え $\dfrac{b}{a}=t$ の利用 同次式 のときに

ポイント：不等式全体を符号に注意して a で割り算をして $\dfrac{b}{a}$ を作る

そこで $\dfrac{b}{a}=t$ とおくことで変数を減らす

（おき換えるので範囲の吟味を忘れずに）

③ 差に注目して平均値の定理の利用

ポイント：式変形をすると平均変化率 $\dfrac{f(a)-f(b)}{a-b}$ の形が見られることに注目して、平均値の定理 （$f(x)$ が閉区間 $[a,\ b]$ で連続，開区間 $(a,\ b)$ で微分可能ならば $\dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}=f'(c)$ 　$a<c<b$ を満たす実数 c が存在する）を利用する。

④ （相加平均）≧（相乗平均）の利用

ポイント：それぞれが正であることや、積が定数になることが利用の合図となることが多い。

補足として一般化すると

$$\frac{a_1+a_2+\cdots+a_n}{n} \geqq \sqrt[n]{a_1a_2\cdots a_n}$$

が成り立ち、等号成立は

$a_1=a_2=\cdots=a_n$

のときである。

⑤ 一方の文字を定数とみる

ポイント：１文字固定法や予選決勝法とも呼ばれる解き方で最大・最小問題にも用いられる。どの文字を固定するかでその後の難易度が変わるため、「高次の文字」や「登場回数の多い文字」を固定することが多い。

⑥ 点 $(a,\ b)$ の領域利用

ポイント： 式変形をして、P, Q が図示が可能な場合は、領域を図示して包含関係を考える。ただし、きちんと内部にあることが示さないといけないので注意が必要。線形計画法など。

これ以外にも $\sin\theta$，$\cos\theta$ （円、楕円）を用いた変換や、対称式（$x+y$, xy）から実数存在条件を使う流れ、(1) など先に証明した不等式を活用する場合や、コーシー・シュワルツの不等式など有名な不等式の公式を活用した場合、合わせ技で解く場合もある。ちなみにシュワルツの不等式は

$$(a^2+b^2)(x^2+y^2)\geqq(ax+by)^2$$

$$(a^2+b^2+c^2)(x^2+y^2+z^2)\geqq(ax+by+cz)^2$$

一般化すると $(a_1{}^2+a_2{}^2+\cdots\cdots+a_n{}^2)(x_1{}^2+x_2{}^2+\cdots\cdots+x_n{}^2)\geqq(a_1x_1+a_2x_2+\cdots\cdots+a_nx_n)$

である。