指数関数　【グラフと大小関係】

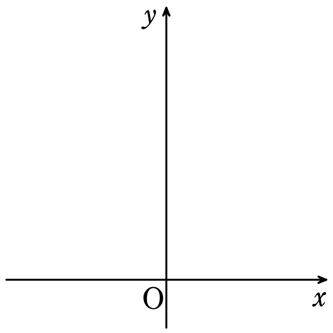
組　　　番　名前

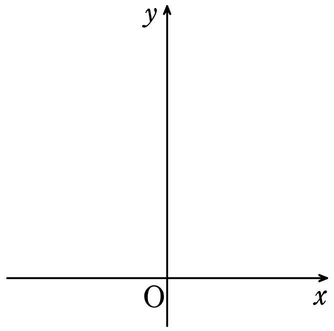
1 次の指数関数のグラフをかけ。

(1)　$y=3^x$　　　　(2)　$y=\left(\frac{1}{3}\right)^x$

x	$\cdots$	-3	-2	-1	0	1	2	3	$\cdots$
3^x	$\cdots$	$\frac{1}{27}$	$\frac{1}{9}$	$\frac{1}{3}$	1	3	9	27	$\cdots$
$\left(\frac{1}{3}\right)^x$	$\cdots$	27	9	3	1	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{9}$	$\frac{1}{27}$	$\cdots$

なので



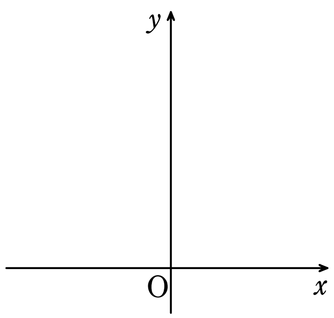


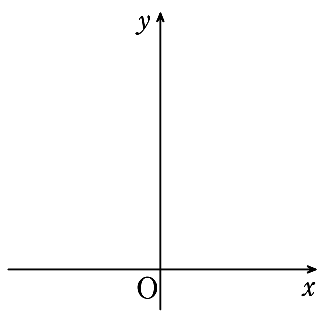
●指数関数$y=a^x$のポイント

- 底が $a>1$ のときは右上がり（増加関数）
- 底が $0<a<1$ のときは右下がり（減少関数）
- 点$(0,1)$，$(1,a)$を通ることを示す
- x軸が漸近線（交わってはいけない！）
- 定義域は実数全体、値域は正の数全体

2 次の指数関数のグラフをかけ。

(1)　$y=4^x$　　　　(2)　$y=\left(\frac{1}{5}\right)^x$





3 次の３つの数の大小を不等号を用いて表せ。

$\sqrt{2}$，$\sqrt[3]{4}$，$\sqrt[5]{8}$

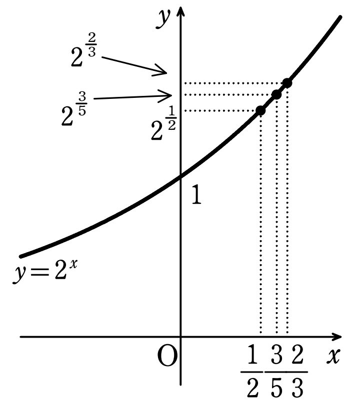
解答　　$\sqrt{2}=2^{\frac{1}{2}}$，　$\sqrt[3]{4}=2^{\frac{2}{3}}$，　$\sqrt[5]{8}=2^{\frac{3}{5}}$

指数の大小を調べると　$\frac{1}{2}<\frac{3}{5}<\frac{2}{3}$

底２が１より大きいから

$$2^{\frac{1}{2}}<2^{\frac{3}{5}}<2^{\frac{2}{3}}$$

すなわち　　$\sqrt{2}<\sqrt[5]{8}<\sqrt[3]{4}$



●大小比較のポイント

- まずは底をそろえてみる（だめなときは指数でor累乗する）
- 底がそろった場合は指数の大小比較

　「底が１より大きい」⇒大小（不等号）そのまま

　「底が１より小さい」⇒大小（不等号）反転

※ 底を必ず１より大きくしてしまうのも一つの手段！

4 次の３つの数の大小を不等号を用いて表せ。

(1)　$\sqrt[3]{4}$，$\sqrt[4]{8}$，$\sqrt[5]{8}$　　　　(2)　1，$(0.2)^3$，$(0.2)^{-1}$

指数関数　【方程式・不等式】　　組　　番　名前

1 次の方程式を解け。

(1) $2^x=4096$　　(2) $9^x=3^{x+1}$

●方程式のポイント
・まずは底をそろえる！　　・後は指数で方程式に

2 次の方程式を解け。

(1) $4^x=8$　　(2) $8^x=\dfrac{1}{16}$　　(3) $27^x=3^{2-x}$

3 次の不等式を解け。

(1) $2^x \geqq 134217728$　　(2) $\left(\dfrac{1}{3}\right)^{x+1}<\left(\dfrac{1}{9}\right)^x$

●不等式のポイント
・まずは底をそろえる！　　・後は指数で不等式だが…
「底が１より大きい」⇒大小（不等号）そのまま
「底が１より小さい」⇒大小（不等号）反転
※ 底を必ず１より大きくしてしまうのも一つの手段！

4 次の不等式を解け。

(1) $3^x<81$　　(2) $\left(\dfrac{1}{2}\right)^x \geqq \dfrac{1}{32}$　　(3) $2^{3x-4}>\left(\dfrac{1}{4}\right)^x$

5 x の方程式 $4^x-3\cdot 2^x-4=0$ について，次の問いに答えよ。

(1) $2^x=t$ とおいて得られる t の方程式を作れ。

(2) 与えられた x の方程式を解け。

●ポイント
・置き換えて２次方程式とみて解く
・置き換えた場合は、置き換えた文字の範囲の吟味を！

1 ●ポイント

・$a^p = M \iff \log_a M = p$　　ただし $a > 0,\ a \fallingdotseq 1,\ M > 0$

・(底)$^{(指数)}$＝(真数)　$\iff$　$\log_{(底)}$(真数)＝(指数)

例　(1)　$8 = 2^3$ から　　$\log_2 8 = 3$

(2)　$\dfrac{1}{2} = 2^{-1}$ から　　$\log_2 \dfrac{1}{2} = -1$

(3)　$\log_4 16 = x$ とすると　　$16 = 4^x$

$4^2 = 4^x$ を解くと $x = 2$ であるから　　$\log_4 16 = 2$

2 次の □ に適する数を求めよ。

(1)　$9 = 3^2$ から　$\log_3 9 = \square$

(2)　$\dfrac{1}{25} = 5^{-2}$ から　$\log_5 \dfrac{1}{25} = \square$

(3)　$3 = 4^x$ のとき　$x = \log_{\square} 3$

(4)　$\log_4 64 = x$ のとき　$x = \square$

3 ●ポイント

・$a^p = M \iff \log_a M = p$　　ただし $a > 0,\ a \fallingdotseq 1,\ M > 0$

$a^0 = 1,\ a^1 = a$　なので

・$\log_{\bigcirc} \square^{\triangle} = \triangle \log_{\bigcirc} \square$　　特に $\log_{\bigcirc} \bigcirc^{\triangle} = \triangle$

・$\log_{\bigcirc} 1 = 0$（○を何乗したら１になるか$\Longrightarrow$０乗）

・$\log_{\bigcirc} \bigcirc = 1$（○を何乗したら○になるか$\Longrightarrow$１乗）

例　(1)　$\log_5 125 = \log_5 5^3 = 3$

(2)　$\log_{\frac{1}{2}} 2 = \log_{\frac{1}{2}} \left(\dfrac{1}{2}\right)^{-1} = -1$

(3)　$\log_3 \sqrt{3} = \log_3 3^{\frac{1}{2}} = \dfrac{1}{2}$

4 次の値を求めよ。

(1)　$\log_2 2^5$　　(2)　$\log_5 25$　　(3)　$\log_3 \dfrac{1}{27}$　　(4)　$\log_{\frac{1}{2}} \dfrac{1}{16}$

(5)　$\log_{10} 0.1$　　(6)　$\log_{\frac{1}{3}} 3$　　(7)　$\log_2 \sqrt[3]{2}$　　(8)　$\log_{\sqrt{5}} 5$

5 $\boxed{2}$ の問題を再度解くと

(4)　$\log_4 64 = x$ のとき　$x = \square$

対数関数　【対数の計算】　　組　　番　名前

1

●ポイント

- $\log_a MN = \log_a M + \log_a N$　$(a>0,\ a \fallingdotseq 1,\ M>0,\ N>0)$
- $\log_a \dfrac{M}{N} = \log_a M - \log_a N$　$(a>0,\ a \fallingdotseq 1,\ M>0,\ N>0)$
- $\log_a M^k = k \times \log_a M$　($a>0,\ a \fallingdotseq 1,\ M>0$ で，k は実数)

※ 累乗 ⟷ × ⟷ ＋

÷ ⟷ − 　の配置でおさえる！

例 (1)　$\log_{10}2 + \log_{10}5 = \log_{10}(2\times 5) = \log_{10}10 = 1$

(2)　$\log_2 24 - \log_2 3 = \log_2 \dfrac{24}{3} = \log_2 8 = \log_2 2^3 = 3$

(3)　$2\log_3 4 + \log_3 5 - \log_3 8 = \log_3 4^2 + \log_3 5 - \log_3 8$

$$= \log_3 \frac{16\times 5}{8} = \log_3 10$$

2 次の計算をせよ。

(1)　$\log_4 2 + \log_4 8$

(2)　$\log_3 2 - \log_3 18$

(3)　$2\log_5 5 - \log_5 15 + \log_5 9$

(4)　$\log_3 4 + \log_3 18 - 3\log_3 2$

3

●底の変換公式のポイント

- $\log_a b = \dfrac{\log_c b}{\log_c a}$　($a,\ b,\ c$ は正の数で，$a \fallingdotseq 1,\ b \fallingdotseq 1,\ c \fallingdotseq 1$)

$$\log_{\bigcirc} \triangle = \frac{\log_{\blacksquare} \triangle}{\log_{\blacksquare} \bigcirc}$$

新たな底をすえて，分子に真数、分母に底

- 特に　$\log_a b = \dfrac{1}{\log_b a}$　($a,\ b,\ c$ は正の数で，$a \fallingdotseq 1,\ b \fallingdotseq 1,\ c \fallingdotseq 1$)

(1)　$\log_8 16$ の値は

$$\log_8 16 = \frac{\log_2 16}{\log_2 8} = \frac{\log_2 2^4}{\log_2 2^3} = \frac{4}{3}$$

ヒント　都合の良さそうな底を持ってくる

(2)　$\log_2 3 \cdot \log_3 8$ の値は

$$\log_2 3 \cdot \log_3 8 = \log_2 3 \times \frac{\log_2 8}{\log_2 3} = \log_2 8 = \log_2 2^3 = 3$$

4 次の値を簡単にせよ。

(1)　$\log_4 8$

(2)　$\log_9 3$

(3)　$\log_3 2 \cdot \log_2 27$

5 次の式を簡単にせよ。

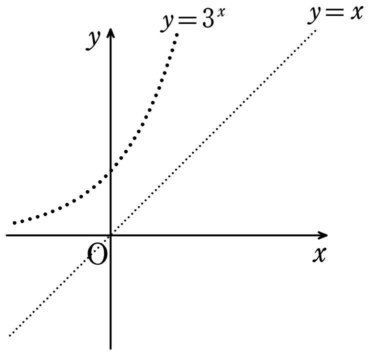
(1)　$\log_2 9 \cdot \log_3 5 \cdot \log_{25} 8$

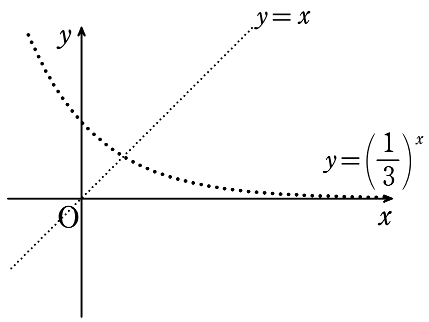
(2)　$(\log_3 5 + \log_9 25)(\log_5 27 - \log_{25} 3)$

対数関数　【グラフと大小関係】　　組　　番　名前

1 次の対数関数のグラフをかけ。

(1)　$y=\log_3 x$　　　(2)　$y=\log_{\frac{1}{3}} x$





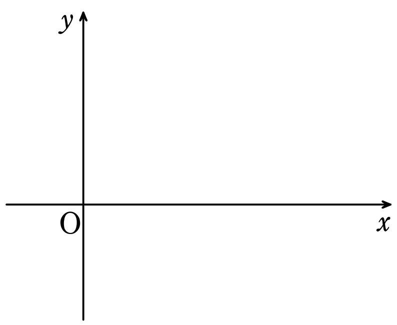
●対数関数 $y=\log_a x$ のポイント

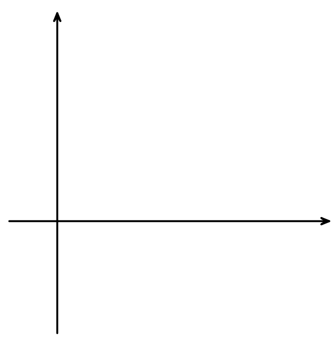
- 底が $a>1$ のときは右上がり（増加関数）
- 底が $0<a<1$ のときは右下がり（減少関数）
- 点(1，0)，(a，1)を通ることを示す
- y 軸が漸近線（交わってはいけない！）
- 定義域は正の数全体、値域は実数全体

←指数関数と対数関数は逆関数の関係

2 次の対数関数のグラフをかけ。

(1)　$y=\log_4 x$　　　(2)　$y=\log_{\frac{1}{2}} x$





3 次の 2 つの数の大小を不等号を用いて表せ。

$2\log_5 3$，$3\log_5 2$

解答　$2\log_5 3=\log_5 3^2=\log_5 9$

$3\log_5 2=\log_5 2^3=\log_5 8$

底 5 が 1 より大きいから

$\log_5 8<\log_5 9$

すなわち　$3\log_5 2<2\log_5 3$

●大小比較のポイント

- まずは底をそろえてみる（だめなときは真数で etc.）
- 底がそろった場合は真数の大小比較

「底が 1 より大きい」⇒大小（不等号）そのまま

「底が 1 より小さい」⇒大小（不等号）反転

※ 底の変換公式で底を必ず 1 より大きくしてしまうのも一つの手段

4 次の 2 つの数の大小を不等号を用いて表せ。

(1)　$3\log_4 3$，$2\log_4 5$　　　(2)　$\frac{1}{2}\log_{\frac{1}{4}} 8$，$\log_{\frac{1}{4}} 3$

対数関数　【方程式・不等式①】　　　　組　　　番　名前

1 次の方程式，不等式を解け。

(1)　$\log_2 x=3$　　　(2)　$\log_2 x \leqq 3$

●方程式・不等式のポイント

・まずは必ず真数条件の吟味を！

・底をそろえて　$\log_{\bigcirc}\triangle=\log_{\bigcirc}\square$ の形に！

・後は真数で方程式・不等式に

「底が１より大きい」⇒大小（不等号）そのまま

「底が１より小さい」⇒大小（不等号）反転

※ 底を必ず１より大きくしてしまうのも一つの手段

※ 方程式は対数の定義から解いてもＯＫ！

2 次の方程式，不等式を解け。

(1)　$\log_2 x=4$　　　(2)　$\log_{\frac{1}{2}} x=2$

(3)　$\log_2 x \leqq 4$　　　(4)　$\log_{\frac{1}{2}} x<2$

3 次の方程式と不等式を解け。

(1)　$\log_3 x+\log_3(x-8)=2$　　　(2)　$\log_{\frac{1}{2}}(x-1)>2$

対数関数　【方程式・不等式①】　　　組　　　番　名前

4 次の方程式を解け。

(1) $\log_4 x + \log_4 (x-6) = 2$　　(2) $\log_2 (x+5) + \log_2 (x-2) = 3$

5 次の不等式を解け。

(1) $\log_2 (x-3) < 4$　　(2) $\log_{\frac{1}{3}} (x+2) \geqq 3$

対数関数　【常用対数】

組　　　　番　名前

1 常用対数表を用いて，次の数の常用対数の値を求めよ。

(1)　1.23　　(2)　38700　　(3)　0.0458　　(4)　397×10^{-6}

2 $\log_{10}2=0.3010$，$\log_{10}3=0.4771$ とする。次の値を小数第 4 位まで求めよ。

(1)　$\log_{10}200$　　(2)　$\log_{10}24$　　(3)　$\log_{10}15$　　(4)　$\log_{4}9$

3 3^{20} の桁数を求めよ。ただし，$\log_{10}3=0.4771$ とする。

4 2^{30} の桁数を調べよ。ただし，$\log_{10}2=0.3010$ とする。

5 3^n が 8 桁の数となるような自然数 n をすべて求めよ。ただし，$\log_{10}3=0.4771$ とする。

6 $\log_{10}2=0.3010$，$\log_{10}3=0.4771$ とするとき

$\left(\dfrac{2}{3}\right)^{50}$ は，小数第何位に初めて 0 でない数字が現れるか。