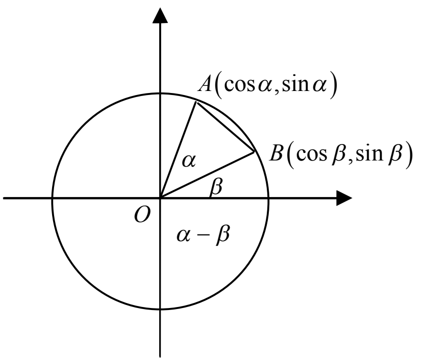
加法定理の証明 【三角関数】

◎まずはじめに

> 教科書 p59
>
> 2 点 $A(x_1, y_1)$， $B(x_2, y_2)$ 間の距離は
>
> $$AB = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$$

● $\cos(\alpha - \beta) \to \cos(\alpha + \beta) \to$ ……

下の図で△OAB を考えると…



余弦定理から

$$\begin{aligned}\cos(\alpha - \beta) &= \frac{OA^2 + OB^2 - AB^2}{2OA \cdot OB} \\ &= \frac{1 + 1 - \left\{(\cos\beta - \cos\alpha)^2 + (\sin\beta - \sin\alpha)^2\right\}}{2} \\ &= \frac{2 - (2 - 2\cos\alpha\cos\beta - 2\sin\alpha\sin\beta)}{2} \\ &= \cos\alpha\cos\beta + \sin\alpha\sin\beta\end{aligned}$$

よって

$$\cos(\alpha - \beta) = \cos\alpha\cos\beta + \sin\alpha\sin\beta \cdots ①$$

また①の等式で β をー β に置き換えると

$$\cos\{\alpha - (-\beta)\} = \cos\alpha\cos(-\beta) + \sin\alpha\sin(-\beta)$$

三角関数の性質から

$$\cos(-\beta) = \cos\beta, \sin(-\beta) = -\sin\beta$$

であるから，整理すると

$$\cos(\alpha + \beta) = \cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha\sin\beta \cdots ②$$

①の等式で α を $\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right)$ に置き換えると

$$\cos\left\{\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) - \beta\right\} = \cos\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right)\cos\beta + \sin\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right)\sin\beta$$

$$\cos\left\{\frac{\pi}{2} - (\alpha + \beta)\right\} = \cos\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right)\cos\beta + \sin\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right)\sin\beta$$

三角関数の性質から

$$\cos\left\{\frac{\pi}{2} - (\alpha + \beta)\right\} = \sin(\alpha + \beta),$$

$$\cos\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) = \sin\alpha, \sin\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) = \cos\alpha$$

であるから，整理すると

$$\sin(\alpha + \beta) = \sin\alpha\cos\beta + \cos\alpha\sin\beta \cdots ③$$

③の等式で β をー β に置き換えると

$$\sin\{\alpha + (-\beta)\} = \sin\alpha\cos(-\beta) + \sin\alpha\cos(-\beta)$$

三角関数の性質から

$$\sin(\alpha - \beta) = \sin\alpha\cos\beta - \sin\alpha\cos\beta \cdots ④$$

◆正弦と余弦の加法定理から正接へ

三角関数の相互関係の式から $\tan\theta = \frac{\sin\theta}{\cos\theta}$ なので,

$$\tan(\alpha + \beta) = \frac{\sin(\alpha + \beta)}{\cos(\alpha + \beta)}, \quad \tan(\alpha - \beta) = \frac{\sin(\alpha - \beta)}{\cos(\alpha - \beta)}$$

とかける.

それぞれの式を計算すると

$$\begin{aligned}\tan(\alpha + \beta) &= \frac{\sin(\alpha + \beta)}{\cos(\alpha + \beta)} \\ &= \frac{\sin\alpha\cos\beta + \cos\alpha\sin\beta}{\cos\alpha\cos\beta - \cos\alpha\cos\beta}\end{aligned}$$

分子分母を $\cos\alpha\cos\beta$ で割ると

$$\tan(\alpha + \beta) = \frac{\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} + \frac{\sin\beta}{\cos\beta}}{1 - \frac{\sin\alpha \cdot \sin\beta}{\cos\alpha \cdot \cos\beta}} = \frac{\tan\alpha + \tan\beta}{1 - \tan\alpha \cdot \tan\beta} \cdots ⑤$$

$$\begin{aligned}\tan(\alpha - \beta) &= \frac{\sin(\alpha - \beta)}{\cos(\alpha - \beta)} \\ &= \frac{\sin\alpha\cos\beta - \cos\alpha\sin\beta}{\cos\alpha\cos\beta + \cos\alpha\cos\beta}\end{aligned}$$

分子分母を $\cos\alpha\cos\beta$ で割ると

$$\tan(\alpha - \beta) = \frac{\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} - \frac{\sin\beta}{\cos\beta}}{1 + \frac{\sin\alpha \cdot \sin\beta}{\cos\alpha \cdot \cos\beta}} = \frac{\tan\alpha - \tan\beta}{1 + \tan\alpha \cdot \tan\beta} \cdots ⑥$$