確認 三角関数の公式の確認

★ 加法定理から発展できるようにしよう

正弦・余弦の加法定理

$\sin(\alpha \pm \beta) = \sin\alpha\cos\beta \pm \cos\alpha\sin\beta$

（咲いたコスモス，コスモス咲いた）

$\cos(\alpha \pm \beta) = \cos\alpha\cos\beta \mp \sin\alpha\sin\beta$

（コスモスコスモス，咲いた咲いた）

$\tan\theta = \dfrac{\sin\theta}{\cos\theta}$

正接の加法定理

$$\tan(\alpha \pm \beta) = \frac{\sin(\alpha \pm \beta)}{\cos(\alpha \pm \beta)} = \frac{\sin\alpha\cos\beta \pm \cos\alpha\sin\beta}{\cos\alpha\cos\beta \mp \sin\alpha\sin\beta}$$

分母分子を $\cos\alpha\cos\beta$ でわると

$$\tan(\alpha \pm \beta) = \frac{\tan\alpha \pm \tan\beta}{1 \mp \tan\alpha\tan\beta}$$

この要領でほかの正接の公式も作れる

$\beta = \alpha$ とすると

２倍角の公式

$\sin 2\alpha = 2\sin\alpha\cos\alpha$

$$\cos 2\alpha = \cos^2\alpha - \sin^2\alpha = 1 - 2\sin^2\alpha = 2\cos^2\alpha - 1$$

２式３式は $\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$ から

$$\tan 2\alpha = \frac{\sin 2\alpha}{\cos 2\alpha} = \frac{2\sin\alpha\cos\alpha}{\cos^2\alpha - \sin^2\alpha} = \frac{2\tan\alpha}{1 - \tan^2\alpha}$$

分母分子を $\cos^2\alpha$ で割る

$\alpha = \dfrac{\theta}{2}$ とすると，余弦の２倍角の公式より

半角の公式

$$\cos\theta = 1 - 2\sin^2\frac{\theta}{2} \quad \Downarrow \quad \sin^2\frac{\theta}{2} = \frac{1-\cos\theta}{2}$$

$$\cos\theta = 2\cos^2\frac{\theta}{2} - 1 \quad \Downarrow \quad \cos^2\frac{\theta}{2} = \frac{1+\cos\theta}{2}$$

$$\tan^2\frac{\theta}{2} = \frac{\sin^2\frac{\theta}{2}}{\cos^2\frac{\theta}{2}} = \frac{1-\cos\theta}{1+\cos\theta}$$

$\beta = 2\alpha$ とすると

３倍角の公式

$$\begin{aligned}\sin 3\alpha &= \sin\alpha\cos 2\alpha + \cos\alpha\sin 2\alpha \\ &= \sin\alpha(1 - 2\sin^2\alpha) + \cos\alpha \cdot 2\sin\alpha\cos\alpha \\ &= \sin\alpha - 2\sin^3\alpha + 2\sin\alpha(1 - \sin^2\alpha) \\ &= 3\sin\alpha - 4\sin^3\alpha\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\cos 3\alpha &= \cos\alpha\cos 2\alpha - \sin\alpha\sin 2\alpha \\ &= \cos\alpha(2\cos^2\alpha - 1) - \sin\alpha \cdot 2\sin\alpha\cos\alpha \\ &= 2\cos^3\alpha - \cos\alpha - 2\cos\alpha(1 - \cos^2\alpha) \\ &= 4\cos^3\alpha - 3\cos\alpha\end{aligned}$$

$\sin(\alpha+\beta), \sin(\alpha-\beta), \cos(\alpha+\beta), \cos(\alpha-\beta)$ をそれぞれ加減すると

積和公式

$\sin(\alpha+\beta) + \sin(\alpha-\beta) = 2\sin\alpha\cos\beta$

$\Rightarrow \quad \sin\alpha\cos\beta = \dfrac{1}{2}\{\sin(\alpha+\beta) + \sin(\alpha-\beta)\}$

$\sin(\alpha+\beta) - \sin(\alpha-\beta) = 2\cos\alpha\sin\beta$

$\Rightarrow \quad \cos\alpha\sin\beta = \dfrac{1}{2}\{\sin(\alpha+\beta) - \sin(\alpha-\beta)\}$

$\cos(\alpha+\beta) + \cos(\alpha-\beta) = 2\cos\alpha\cos\beta$

$\Rightarrow \quad \cos\alpha\cos\beta = \dfrac{1}{2}\{\cos(\alpha+\beta) + \cos(\alpha-\beta)\}$

$\cos(\alpha+\beta) - \cos(\alpha-\beta) = -2\sin\alpha\sin\beta$

$\Rightarrow \quad \sin\alpha\sin\beta = -\dfrac{1}{2}\{\cos(\alpha+\beta) - \cos(\alpha-\beta)\}$

$\alpha + \beta = A$

$\alpha - \beta = B$

とおくと

$\alpha = \dfrac{A+B}{2}$

$\beta = \dfrac{A-B}{2}$

和積公式

$$\sin A + \sin B = 2\sin\frac{A+B}{2}\cos\frac{A-B}{2}$$

$$\sin A - \sin B = 2\cos\frac{A+B}{2}\sin\frac{A-B}{2}$$

$$\cos A + \cos B = 2\cos\frac{A+B}{2}\cos\frac{A-B}{2}$$

$$\cos A - \cos B = -2\sin\frac{A+B}{2}\sin\frac{A-B}{2}$$