



極値を持つ条件の鉄則

極値とは？

一般に、関数 $f(x)$ が $x=a$ を境目として増加から減少に移るとき、
 $f(x)$ は $x=a$ で極大であるといい、 $f(a)$ を極大値という。
 また、関数 $f(x)$ が $x=a$ を境目として減少から増加に移るとき、
 $f(x)$ は $x=a$ で極小であるといい、 $f(a)$ を極小値という。
 極大値と極小値をまとめて極値という。

3 次 関 数 $f(x)$ が 極 値 を 持 つ 条 件 を 考 え よ う

3次関数のグラフをかく手順は

1 $f(x)$ を微分する！

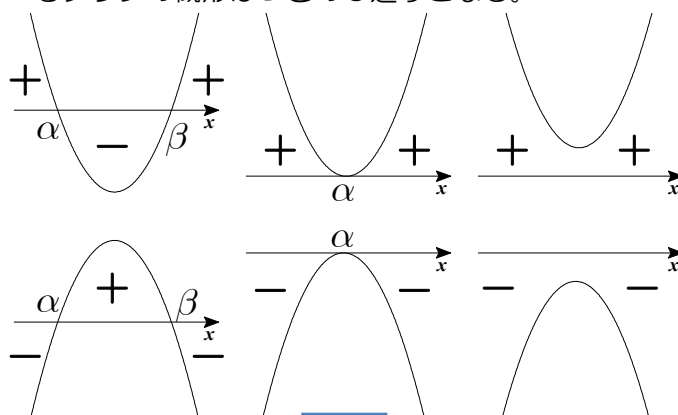
2 $f'(x)=0$ を解く！

3 $y=f'(x)$ のグラフを考える！

4 増減表をかく！

5 $y=f(x)$ のグラフをかく！

$y=f'(x)$ のグラフは2次関数となるので、考えられるグラフの概形はつぎの6通りとなる。

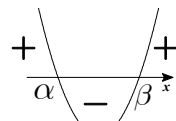


増加から減少、減少から増加に移り変わるので極値が存在する。

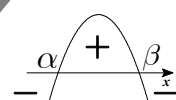
$y=f'(x)$ が x 軸と異なる2点で交わる。
 つまり $f'(x)$ が異なる2つの実数解を持てばよい。

$$f'(x)=0 \text{ について } D > 0$$

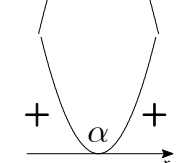
6通りごとに増減表を考えると



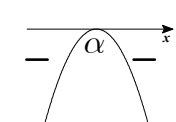
x	...	α	...	β	...
f'	+	0	-	0	+
f	$\nearrow$	$f(\alpha)$	$\searrow$	$f(\beta)$	$\nearrow$



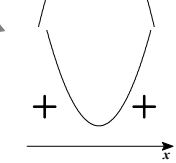
x	...	α	...	β	...
f'	-	0	+	0	-
f	$\searrow$	$f(\alpha)$	$\nearrow$	$f(\beta)$	$\searrow$



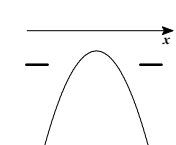
x	...	α	...
f'	+	0	+
f	$\nearrow$	$f(\alpha)$	$\nearrow$



x	...	α	...
f'	-	0	-
f	$\searrow$	$f(\alpha)$	$\searrow$



x	...	...
f'	+	
f	$\nearrow$	



x	...	...
f'	-	
f	$\searrow$	

単調増加、または単調減少なので極値が存在しない。

$y=f'(x)$ が x 軸と接する、または共有点を持たない。
 つまり $f'(x)$ が重解を持つ、または実数解を持たない（虚数解を持つ）。

$$f'(x)=0 \text{ について } D \leq 0$$