



# 恒等式・等式・不等式の証明の確認

## ◇◆◇ 恒等式 ◇◆◇

### 恒等式の性質

$P, Q$  が  $x$  についての多項式であるとき

1.  $P=0$  が恒等式  $\Leftrightarrow P$  の各項の係数はすべて0
2.  $P=Q$  が恒等式  $\Leftrightarrow P$  と  $Q$  の次数は等しい。

両辺の同じ次数の項の係数はそれぞれ等しい。

### 恒等式の未定係数の決定

#### 係数比較法

1. 各辺を展開して**降べきの順**に整理する。
2. 両辺の**同じ次数の項の係数**を等しいとおき、連立方程式とする。

#### 数値代入法

1. 特定の値を**与式に代入**する。
2. 係数に関する連立方程式を解いて係数を定める。
3. 求めた係数によって恒等式が成り立つかを確認する。**(逆の確認)**

## ◇◆◇ 等式 ◇◆◇

### 等式の証明の方法

$A=B$  を証明するには

1.  $A$  か  $B$  の一方を変形して、他方を導く。(複雑な式の方を変形するのが原則)
2.  $A$  と  $B$  の両方を変形して、同じ式を導く。
3.  $A-B=0$  であることを示す。

### 条件式のついた等式の証明の方法

#### 条件式が等式1つのとき

解法 1. 条件式を変形して解き、証明する式に代入する。

(結論に含まれない文字があれば、その文字を消去しよう)

解法 2.  $A-B$  を行い因数分解などにより、条件式が使えるようにする。

#### 条件式が等式2つ以上のとき

条件式を連立方程式とみる。この連立方程式を解き、その解を証明する式に代入して文字数を減らしてから証明する。

#### 条件式が比例式のとき

比や連比で示されているものは分数の形になおし、(比例式)  $= k$  とおく。

できた式をばらして変形し、証明する式に代入することで文字を減らす。

◆◆◆ 不等式 ◆◆◆

大小関係の基本性質

1.  $a > b, b > c \Rightarrow a > c$
2.  $a > b \Rightarrow a + c > b + c, a - c > b - c$
3.  $a > b, c > 0 \Rightarrow ac > bc, \frac{a}{c} > \frac{b}{c}$
4.  $a > b, c < 0 \Rightarrow ac < bc, \frac{a}{c} < \frac{b}{c}$

大小関係と差の正負

5.  $a > b \Rightarrow a - b > 0$
6.  $a < b \Rightarrow a - b < 0$

不等式の証明の基本は  
 $A - B > 0$   
 差を作ること

■□ 不等式の証明方法 □■

不等式の  
証明の基本は  
 $A - B > 0$

結論を導くために…

1. 実数の平方  $a^2 \geq 0, a^2 + b^2 \geq 0$  を用いる
2. 平方して比較  
 $A \geq 0, B \geq 0$  のとき  $A > B \Leftrightarrow A^2 > B^2, A \geq B \Leftrightarrow A^2 \geq B^2$
3. 相加平均と相乗平均の関係の利用
4. 似た問題は、結果を用いたり、方法をまねる

√や絶対値を含む問題

1. 両辺を平方し、差をとる  $A^2 - B^2$
2. 平方した式を元に戻す際に、 $A, B$  ともに正であることにふれる。

絶対値と不等式

$$a \geq 0 \rightarrow |a| = a$$

$$a < 0 \rightarrow |a| = -a$$

$$|a| = |-a|, |a|^2 = a^2$$

$$-|a| \leq a \leq |a|$$

$$|ab| = |a||b|$$

$$b \neq 0 \text{ のとき } \left| \frac{a}{b} \right| = \frac{|a|}{|b|}$$

相加平均と相乗平均

$a \geq 0, b \geq 0$  のとき

$$\frac{a+b}{2} \geq \sqrt{ab}$$

等号は  $a = b$  のとき成り立つ

※ 通常計算式中では

$$a + b \geq 2\sqrt{ab}$$

となることが多い

それ以外にも…

平方完成やコーシー・シュワルツの不等式  $(a^2 + b^2)(x^2 + y^2) \geq (ax + by)^2$   
 (等号は  $\frac{x}{a} = \frac{y}{b}$  のとき) などの活用もあるので注意。