確認 恒等式・等式・不等式の証明の確認

◇◆◇ 恒等式 ◇◆◇

恒等式の性質

P, Q が x についての多項式であるとき

1. $P=0$ が恒等式 $\Leftrightarrow$ P の各項の係数はすべて 0
2. $P=Q$ が恒等式 $\Leftrightarrow$ P と Q の次数は等しい。
   両辺の同じ次数の項の係数はそれぞれ等しい。

恒等式の未定係数の決定

係数比較法

1. 各辺を展開して**降べきの順に**整理する。
2. 両辺の**同じ次数の項の係数**を等しいとおき、連立方程式とする。

数値代入法

1. 特定の値を**与式に代入**する。
2. 係数に関する連立方程式を解いて係数を定める。
3. 求めた係数によって恒等式が成り立つかを確認する。（**逆の確認**）

◇◆◇ 等式 ◇◆◇

等式の証明の方法

$A=B$ を証明するには

1. A か B の**一方を変形**して、**他方を導く**。（複雑な式の方を変形するのが原則）
2. A と B の**両方を変形**して、**同じ式を導く**。
3. $A-B=0$ **である**ことを示す。

条件式のついた等式の証明の方法

条件式が等式１つのとき

解法 1. 条件式を変形して解き、**証明する式に代入**する。
（結論に含まれない文字があれば、その文字を消去しよう）

解法 2. A－B を行い因数分解などにより、条件式が使えるようにする。

条件式が等式２つ以上のとき

条件式を連立方程式とみる。この連立方程式を解き、その解を証明する式に代入して文字数を減らしてから証明する。

条件式が比例式のとき

比や連比で示されているものは分数の形になおし、$(\text{比例式})=k$ とおく。

できた式をばらして変形し、**証明する式に代入**することで文字を減らす。

◇◆◇ 不等式 ◇◆◇

大小関係の基本性質

1. $a>b,\ b>c \Rightarrow a>c$
2. $a>b \Rightarrow a+c>b+c,\ a-c>b-c$
3. $a>b,\ c>0 \Rightarrow ac>bc,\ \dfrac{a}{c}>\dfrac{b}{c}$
4. $a>b,\ c<0 \Rightarrow ac<bc,\ \dfrac{a}{c}<\dfrac{b}{c}$

大小関係と差の正負

5. $a>b \Rightarrow a-b>0$
6. $a<b \Rightarrow a-b<0$

不等式の証明の基本は
$A-B>0$
差を作ること

■□ 不等式の証明方法 □■

不等式の
証明の基本は
$A-B>0$

結論を導くために…

1. **実数の平方** $a^2 \geqq 0$、$a^2+b^2 \geqq 0$ を用いる
2. **平方して比較**
   $A \geqq 0,\ B \geqq 0$ のとき $A>B \Leftrightarrow A^2>B^2$，$A \geqq B \Leftrightarrow A^2 \geqq B^2$
3. **相加平均と相乗平均の関係**の利用
4. 似た問題は、結果を用いたり、方法をまねる

√や絶対値を含む問題

1. 両辺を平方し、差をとる A^2-B^2
2. 平方した式を元に戻す際に、$A,\ B$ ともに正であることにふれる。

絶対値と不等式

$$a \geqq 0 \rightarrow |a|=a$$
$$a<0 \rightarrow |a|=-a$$
$$|a|=|-a|,\quad |a|^2=a^2$$
$$-|a| \leqq a \leqq |a|$$
$$|ab|=|a||b|$$
$$b \neq 0 \text{のとき} \left|\frac{a}{b}\right|=\frac{|a|}{|b|}$$

相加平均と相乗平均

$a \geqq 0,\ b \geqq 0$ のとき

$$\frac{a+b}{2} \geqq \sqrt{ab}$$

等号は $a=b$ のとき成り立つ

※ 通常計算式中では

$$a+b \geqq 2\sqrt{ab}$$

となることが多い

それ以外にも…

平方完成やコーシー・シュワルツの不等式 $\left(a^2+b^2\right)\left(x^2+y^2\right) \geqq (ax+by)^2$（等号は $\dfrac{x}{a}=\dfrac{y}{b}$ のとき）などの活用もあるので注意。