確認 高次方程式の解法の確認

★ 因数定理や A=B·Q+R を活用することで３次以上の方程式も解いてみよう

基本編

1 代入して０となる値を探す

問い） $2x^3-3x^2-4=0$ を解け

$P(x)=2x^3-3x^2-4$ とすると

$P(2)=16-12-4=0$

よって $P(x)$ は $x-2$ を因数にもつ

POINT

代入する値の候補は $\pm\dfrac{(\text{定数項の約数})}{(\text{最高次の係数の約数})}$

⇒ この場合は $\pm\frac{1}{1},\ \pm\frac{2}{1},\ \pm\frac{4}{1},\ \pm\frac{1}{2},\ \pm\frac{2}{2},\ \pm\frac{4}{2}$ が候補

POINT

$x=2$ を代入したら０になる ⇒ $x-2=0$

⇒ $x-2$ を因数にもつ

2 因数となる式でもとの式を割る

$P(x)=2x^3-3x^2-4$ を $x-2$ で割ると

$P(x)=(x-2)(2x^2+x+2)$

したがって

$(x-2)(2x^2+x+2)=0$

POINT

組立除法または筆算で計算を！

$$\begin{array}{r|rrrr} 2 & 2 & -3 & 0 & -4 \\ & & 4 & 2 & 4 \\ \hline & 2 & 1 & 2 & \boxed{0} \end{array}$$

$$\begin{array}{rrrr} & 2x^2 & +\ x & +2 \\ x-2 \,) & 2x^3 & -3x^2 & \quad -4 \\ & 2x^3 & -4x^2 & \\ \hline & & x^2 & \quad -4 \\ & & x^2 & -2x \\ \hline & & & 2x-4 \\ & & & 2x-4 \\ \hline & & & 0 \end{array}$$

3 さらに因数分解または解の公式を

$(x-2)(2x^2+x+2)=0$

より

$x-2=0$ または $2x^2+x+2=0$

ゆえに解の公式を用いて

$x=2,\ \dfrac{-1\pm\sqrt{15}\,i}{4}$

POINT

２次式になれば解の公式または因数分解で計算可能！

ex ４次以上の方程式の場合

POINT

２次式になれば解の公式または因数分解で計算可能！

⇒①と②の手順を繰り返すことで

「１次式の積」または「１次式と２次式の積」「２次式と２次式の積」などの形になるまで変形をする

工夫して解答へ

因数分解で導く

例１） $x^3=1$

移項して　$x^3-1=0$

因数分解の公式より

$(x-1)(x^2+x+1)=0$

$x-1=0$ または $x^2+x+1=0$

ゆえに解の公式を用いて

$x=1,\ \dfrac{-1\pm\sqrt{3}i}{2}$

POINT

例１）別解

$P(x)=x^3-1$ とすると

$P(1)=1-1=0$

よって $P(x)$ は $x-1$ を因数にもつ

$P(x)$ を $x-1$ で割ると

$P(x)=(x-1)(x^2+x+1)$

したがって　$(x-1)(x^2+x+1)=0$

$x-1=0$ または $x^2+x+1=0$

ゆえに解の公式を用いて

$x=1,\ \dfrac{-1\pm\sqrt{3}i}{2}$

例２） $x^4-x^2-2=0$

$(x^2)^2-x^2-2=0$

左辺を因数分解すると

$(x^2-2)(x^2+1)=0$

$x^2-2=0$ または $x^2+1=0$

$x^2-2=0$ より $x^2=2$

$\therefore x=\pm\sqrt{2}$

$x^2+1=0$ より $x^2=-1$

$\therefore x=\pm i$

ゆえに $x=\pm\sqrt{2},\ \pm i$

○１の３乗根

ある数を３乗して a になるとき、その数を a の３乗根という。すなわち $x^3=a$ となる数 x が a の３乗根である。

１の３乗根のうち、虚数であるものの１つを ω (ｵﾒｶﾞ)とするとき、ω^2 も１の３乗根になる。

$\omega^3=1$ であり、$x^3-1=(x-1)(x^2+x+1)$ であるから ω は $x^2+x+1=0$ の解であり　$\omega^2+\omega+1=0$ が成り立つ。

◎複２次式の場合

例３） $x^4+x^2+1=0$

$(x^2+1)^2-x^2=0$

$(x^2+1-x)(x^2+1+x)=0$

$(x^2-x+1)(x^2+x+1)=0$

$x^2-x+1=0$ または $x^2+x+1=0$

ゆえに解の公式を用いて

$x=\dfrac{1\pm\sqrt{3}i}{2},\ \dfrac{-1\pm\sqrt{3}i}{2}$

例３改） $x^4+x^2+1=0$

$P(x)=x^4+x^2+1$ とすると　$P(\omega)=\omega^4+\omega^2+1=\omega^3\cdot\omega+\omega^2+1=\omega+\omega^2+1=0$

よって $P(x)$ は $x-\omega$ を因数にもつ

$P(x)=x^4+x^2+1$ とすると　$P(\omega^2)=\omega^8+\omega^4+1=(\omega^3)^2\cdot\omega^2+\omega^3\cdot\omega+1=\omega^2+\omega+1=0$

よって $P(x)$ は $x-\omega^2$ を因数にもつ

したがって $P(x)$ は $(x-\omega)(x-\omega^2)=x^2-(\omega^2+\omega)x+\omega^3=x^2+x+1$

を因数にもつ（割り切れる）

$$
\begin{array}{r}
x^2-x+1 \\
x^2+x+1\,\big)\,\overline{x^4+x^2+1} \\
\underline{x^4+x^3+x^2} \\
-x^3 \\
\underline{-x^3-x^2-x} \\
x^2+x+1 \\
\underline{x^2+x+1} \\
0
\end{array}
$$

ゆえに $P(x)=(x^2+x+1)(x^2-x+1)$

$x^2-x+1=0$ または $x^2+x+1=0$

ゆえに解の公式を用いて　$x=\dfrac{1\pm\sqrt{3}i}{2},\ \dfrac{-1\pm\sqrt{3}i}{2}$

ω(ｵﾒｶﾞ)で導く