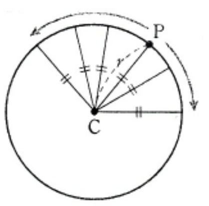
確認 軌跡の確認

➔ 軌跡とは

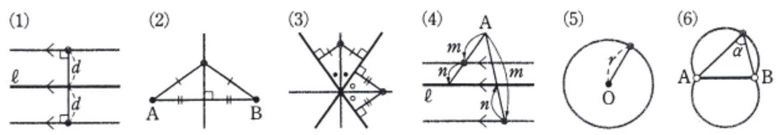
平面上に，定点Cがあり，点Pが条件 $CP=r$ （r は正の定数）を満たしながら動くとき，Pが描く図形は，中心が C，半径 r の円である。一般に与えられた条件を満たす点が動いてできる図形を，その条件を満たす点の**軌跡**という。

●定点…移動することがない決まった点
●動点…ある条件に従って動く点。
図の例では，Pが動点である。



◎ 基本の軌跡

条　件　p	図形 F （軌跡）
(1) 定直線 ℓ からの距離が一定 d	ℓ との距離が d である２直線
(2) ２定点 A，B から等距離	線分 AB の垂直二等分線
(3) 交わる２定直線から等距離	２組の対頂角の二等分線 （この２直線は直交）
(4) 定点 A と定直線 ℓ 上の点を結ぶ線分を一定の比 $m:n$ に分ける	A から ℓ に引いた垂線を $m:n$ に分ける点を通り ℓ に平行な直線
(5) 定点 O からの距離が一定 r	中心 O，半径 r の円
(6) 定線分 AB を等しい角 α にみる。 特に，AB を見る角が直角ならば	AB を弦とし角 α を含む弓形の弧 (弦 AB に関して対称な２つの部分) 直径 AB の円(ともに A，B を除く)



➔ 軌跡の一般的な求め方

例題　2 点 $A(-3,\ 0)$，$B(3,\ 0)$ からの距離の平方の和が 20 である点 P の軌跡を求めよ。

開　始

軌跡上の任意の点 P の座標を $(x,\ y)$ とする。
→ 点 P の座標を $(x,\ y)$ とする。

与えられた条件を $x,\ y$ で表す。
→ 点 P の満たす条件は $AP^2+BP^2=20$ 。
よって
$$\left\{(x+3)^2+y^2\right\}+\left\{(x-3)^2+y^2\right\}=20$$

整理して得られる方程式の表す図形を読み取る。
→ 展開して整理すると
$$x^2+y^2=1$$
ゆえに
点 P は円 $x^2+y^2=1$ 上にある

その図形上のすべての点が条件を満たすかどうかを確かめる。
→ 逆に、円上の任意(すべて)の点は問題の条件を満たす

終　了

したがって求める軌跡は
中心 $(0,0)$、半径1の円

➔ 2定点からの距離が一定な点の軌跡

① 軌跡を求める点 P の座標を $(x,\ y)$ とする。
② 条件から、$x,\ y$ の関係式を導く。
③ ②の関係式を整理して得られる方程式の表す図形を求める。
④ （逆を確認する）

POINT
２定点Ａ，Ｂからの距離の比が $m:n$ （一定）である点Ｐの軌跡（$m>0,\ n>0$ とする）
(1) $m=n$ のとき　AP=BP であるから，線分 AB の**垂直二等分線**
(2) $m\neq n$ のとき　線分 AB を $m:n$ に内分する点と，外分する点を直径の両端とする円（**アポロニウスの円**）

➔ 動点と、連動点の軌跡

動点 (s,t) と連動点 (x,y) の条件式
→ ほしいのは x,y の方程式
→ つなぎの文字 s,t を消去

① 動点Qの座標を $(s,\ t)$ 、それにともなって動く点(連動点：軌跡を求める点) P の座標を $(x,\ y)$ とする。
② 点Qがグラフ上にある条件から、$s,\ t$ の関係式を導く。
③ P, Q の関係から、$s,\ t$ を $x,\ y$ を用いて表す。
④ ③の式を②の式に代入して、$s,\ t$ を消去する。

➔ 媒介変数で表された点の軌跡

$$\begin{cases} x=(t\ \text{の式}) \\ y=(t\ \text{の式}) \end{cases} \xrightarrow{t\ \text{を消去}} y=(x\ \text{の式})$$

☞ **放物線の頂点で考えると…**
① 放物線の頂点の座標を求める。
② 頂点 P の座標を (x,y) とする。　……x,y は t の式で表される
③ t を消去して，x,y の関係式を導く。

t は x,y を結びつける変数で媒介変数という

➔ 2直線の交点の軌跡

直線の交点の座標は連立方程式
→ 「２式の引き算」or「代入法」

☞２式の引き算
① 各式ごとに定数の文字(m,k など)でくくる。
② ①の式から表すことのできない点(除く点)を特定する。
③ x,y 以外の文字の係数をそろえて、引き算をする
④ 式を整理して、軌跡の方程式をたてる。
(②での除く点に注意)

☞代入法
① 交点の座標を $P(X,Y)$ とする。
② 点 P の座標を直線の方程式にそれぞれ代入する。
③ X,Y 以外の文字について整理して、連立し消去する
④ X,Y の関係式を求める。