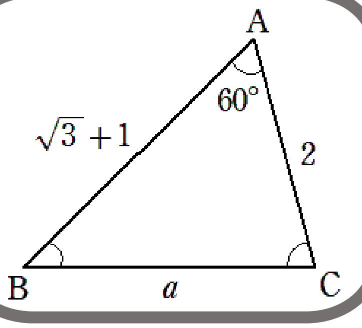
確認 ちょっと面倒な辺を含む三角形の解法の確認

★ ちょっと面倒な問題を、見方を変えて考えてみよう

「△ABC において，$b=2$，$c=\sqrt{3}+1$，$A=60^\circ$ のとき，a，B，C を求めよ。」
といったように、辺の長さがルートを含む足し算引き算の形で表されている問題について考えてみよう。



正弦定理や余弦定理を用いた解答（教科書の解き方）

余弦定理により

$$a^2=2^2+\left(\sqrt{3}+1\right)^2-2\cdot2\left(\sqrt{3}+1\right)\cos60^\circ=6$$

$a>0$ であるから　$a=\sqrt{6}$

余弦定理により

面倒くささそうな辺の向かいは避ける

$$\cos B=\frac{\left(\sqrt{3}+1\right)^2+\left(\sqrt{6}\right)^2-2^2}{2\cdot\left(\sqrt{3}+1\right)\cdot\sqrt{6}}=\frac{2\left(3+\sqrt{3}\right)}{2\sqrt{6}\left(\sqrt{3}+1\right)}=\frac{\sqrt{3}\left(\sqrt{3}+1\right)}{\sqrt{6}\left(\sqrt{3}+1\right)}=\frac{1}{\sqrt{2}}$$

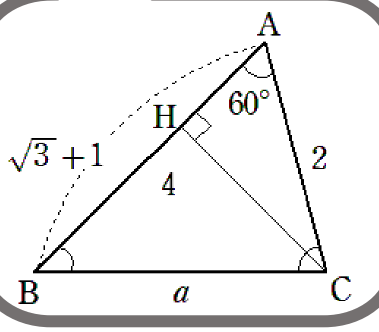
正弦定理で解いても良い（ただし解の大きさの吟味が必要）

有理化で求めても良い

ゆえに　$B=45^\circ$

よって　$C=180^\circ-\left(60^\circ+45^\circ\right)=75^\circ$

と、解くのが普通であるが、ちょっと面倒な辺の向かいの頂点から垂線を補助線として引いた解き方を紹介しよう。



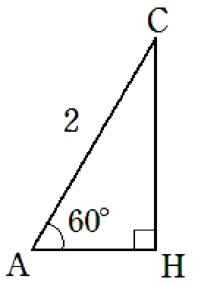
２つの三角形で比を用いた解き方

△ACH に注目すると

$\angle\mathrm{CAH}=60^\circ$，$\angle\mathrm{AHC}=90^\circ$ なので

$\mathrm{AH}:\mathrm{CA}:\mathrm{HC}=1:2:\sqrt{3}$ の直角三角形である

ゆえに　$\angle\mathrm{ACH}=30^\circ$，$\mathrm{AH}=1$，$\mathrm{HC}=\sqrt{3}$



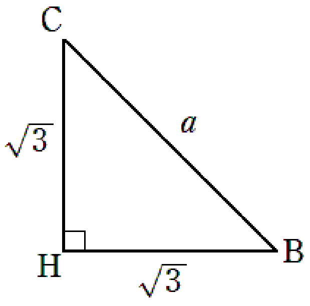
ここで $\mathrm{AB}=\mathrm{AH}+\mathrm{HB}$ であるから　$\mathrm{HB}=\mathrm{AB}-\mathrm{AH}=\sqrt{3}+1-1=\sqrt{3}$

△CBH に注目すると

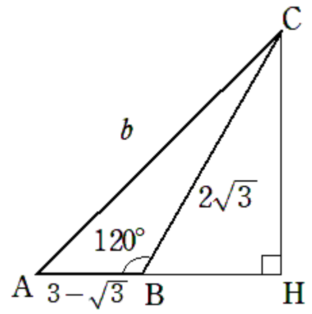
直角二等辺三角形であるから $\mathrm{HC}:\mathrm{HB}:\mathrm{CB}=1:1:\sqrt{2}$

ゆえに　$\mathrm{BC}=a=\sqrt{3}\cdot\sqrt{2}=\sqrt{6}$，$\angle\mathrm{HBC}=\angle\mathrm{HCB}=45^\circ$

したがって　$\angle\mathrm{C}=\angle\mathrm{ACH}+\angle\mathrm{HCB}=30^\circ+45^\circ=75^\circ$

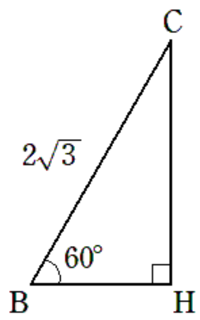


「△ABC において，$a=2\sqrt{3}$，$c=3-\sqrt{3}$，$B=120^\circ$ のとき，b，A，C を求めよ。」



２つの三角形で比を用いた解き方

AB を延長して C から垂線を下ろし交点を H とする



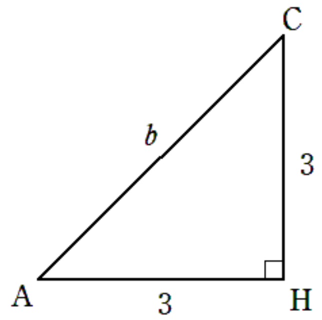
$\angle \mathrm{CBH}=180^\circ-120^\circ=60^\circ$ なので△BCH に注目すると

$\angle \mathrm{CAH}=60^\circ$，$\angle \mathrm{AHC}=90^\circ$ なので

$\mathrm{HB}:\mathrm{BC}:\mathrm{CH}=1:2:\sqrt{3}$ の直角三角形である

ゆえに　$\angle \mathrm{BCH}=30^\circ$，$\mathrm{BH}=\sqrt{3}$，$\mathrm{CH}=3$

ここで $\mathrm{AB}+\mathrm{BH}=\mathrm{AH}$ であるから　$\mathrm{AH}=\mathrm{AB}+\mathrm{BH}=3-\sqrt{3}+\sqrt{3}=3$



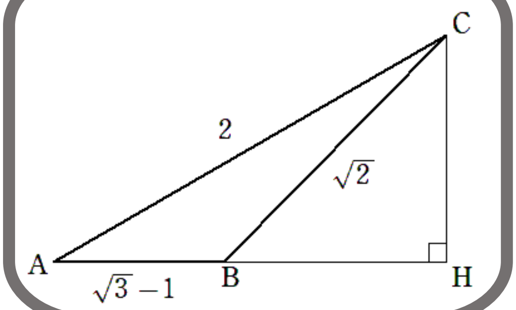
△ACH に注目すると　直角二等辺三角形であるから $\mathrm{AH}:\mathrm{HC}:\mathrm{CA}=1:1:\sqrt{2}$

ゆえに　$\mathrm{AC}=b=3\cdot\sqrt{2}=3\sqrt{2}$，$\angle \mathrm{HAC}=\angle \mathrm{HCA}=45^\circ$

したがって　$\angle \mathrm{C}=\angle \mathrm{ACH}-\angle \mathrm{HCB}=45^\circ-30^\circ=15^\circ$

ただし，３辺のみが与えられたときは注意が必要！

「△ABC において，$a=\sqrt{2}$，$b=2$，$c=\sqrt{3}-1$ のとき，A，B，C を求めよ。」



２つの三角形で比を用いた解き方

$c<a<b$ であり　$b^2>a^2+c^2$ であるから　$\angle$B が鈍角の鈍角三角形

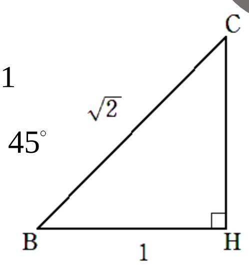
AB を延長して C から垂線を下ろし交点を H とする

ここで $\mathrm{AB}=\sqrt{3}-1$ であるから　$\mathrm{AH}=\sqrt{3}$，$\mathrm{BH}=1$　**と仮定すると**

これでは、どのような直角三角形か特定できない
⇒本来は余弦定理から解く

$\sqrt{3}-1$の組合せから推測して辺の長さを仮定してみる

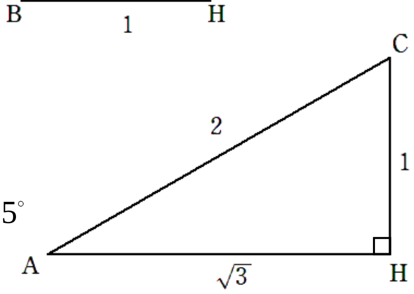
△BCH で三平方の定理により



$\mathrm{HC}^2=\mathrm{BC}^2-\mathrm{BH}^2=2-1=1$　$\mathrm{HC}>0$ より $\mathrm{HC}=1$

直角二等辺三角形であるから $\angle \mathrm{HBC}=\angle \mathrm{HCB}=45^\circ$

ゆえに　$\angle \mathrm{ABC}=180^\circ-45^\circ=135^\circ$



$\mathrm{HC}:\mathrm{CA}:\mathrm{AH}=1:2:\sqrt{3}$ の直角三角形である

ゆえに　$\angle \mathrm{A}=30^\circ$，$\angle \mathrm{ACH}=60^\circ$

したがって　$\angle \mathrm{C}=\angle \mathrm{ACH}-\angle \mathrm{BCH}=60^\circ-45^\circ=15^\circ$

このとき

$$2^2+\left(\sqrt{3}-1\right)^2-2\cdot2\cdot\left(\sqrt{3}-1\right)\cdot\cos30^\circ=4+4-2\sqrt{3}-2\cdot2\cdot\left(\sqrt{3}-1\right)\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$=4+4-2\sqrt{3}-6+2\sqrt{3}=2=\left(\sqrt{2}\right)^2$$　となり条件を満たす