確認 相互関係式の求値問題の確認

★ 式の流れを考えながら確認しておこう

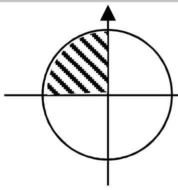
◇ $\cos\theta$ が与えられたとき

例題） $\cos\theta=-\dfrac{1}{4}$ のとき，$\sin\theta$，$\tan\theta$ の値を求めよ。ただし，$0^\circ\leqq\theta\leqq180^\circ$ とする。

手順①　与えられた条件から、問題以外の三角比の符号を考える。（王道・邪道）

$0^\circ\leqq\theta\leqq180^\circ$，$\cos\theta=-\dfrac{1}{4}<0$ なので

$\sin\theta>0$，$\tan\theta<0$



図を書いて確認を。
問題文で $\cos\theta$ が与えられているので、
求める $\sin\theta$， $\tan\theta$ の符号を考える。

王道 手順②　$\sin^2\theta+\cos^2\theta=1$ に問題で与えられた三角比の値を代入して計算する

$\sin^2\theta+\cos^2\theta=1$ に代入すると

$$\sin^2\theta+\left(-\frac{1}{4}\right)^2=1$$

$$\sin^2\theta=1-\frac{1}{16}=\frac{15}{16}$$

$$\sin\theta=\pm\frac{\sqrt{15}}{4}$$

王道 手順③　手順①で考えた符号を元に絞り込む

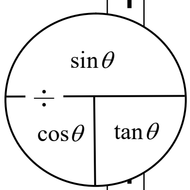
$\sin\theta>0$ なので　$\sin\theta=\dfrac{\sqrt{15}}{4}$

王道 手順④　$\tan\theta=\dfrac{\sin\theta}{\cos\theta}$ で残り１つを求める

$$\tan\theta=\frac{\sin\theta}{\cos\theta}=\frac{\frac{\sqrt{15}}{4}}{-\frac{1}{4}}=-\frac{\sqrt{15}}{1}=-\sqrt{15}$$

or

$$\tan\theta=\frac{\sin\theta}{\cos\theta}=\sin\theta\div\cos\theta=\frac{\sqrt{15}}{4}\div\left(-\frac{1}{4}\right)=\frac{\sqrt{15}}{4}\times\left(-\frac{4}{1}\right)=-\sqrt{15}$$

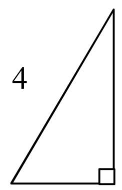


邪道 手順②　問題で与えられた三角比の値から直角三角形をイメージする

$\cos\theta=-\dfrac{1}{4}$ より

図のような

直角三角形を考える



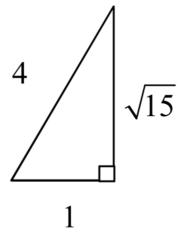
三平方の定理により

$x^2+1^2=4^2$，$x>0$ なので　$x=\sqrt{15}$

邪道 手順③　手順①で考えた符号を元に絞り込む

$\sin\theta>0$，$\tan\theta<0$ なので

直角三角形より



$$\sin\theta=\frac{\sqrt{15}}{4}$$

$$\tan\theta=-\frac{\sqrt{15}}{1}=-\sqrt{15}$$

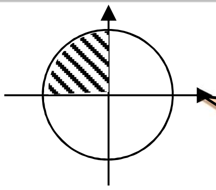
◇ $\tan\theta$が与えられたとき

例題） $\tan\theta=-2$ のとき，$\sin\theta$，$\tan\theta$ の値を求めよ。ただし，$0^\circ\leqq\theta\leqq180^\circ$ とする。

手順① 与えられた条件から、問題以外の三角比の符号を考える。（王道・邪道）

$0^\circ\leqq\theta\leqq180^\circ$，$\tan\theta=-2<0$ なので

$\sin\theta>0,\ \cos\theta<0$



図を書いて確認を。
問題文で $\tan\theta$ が与えられているので、
求める $\sin\theta$，$\cos\theta$ の符号を考える。

王道 手順② $1+\tan^2\theta=\dfrac{1}{\cos^2\theta}$ に問題で与えられたの値を代入して計算する

$1+(-2)^2=\dfrac{1}{\cos^2\theta}$ より $\dfrac{5}{1}=\dfrac{1}{\cos^2\theta}$

$\cos^2\theta=\dfrac{1}{5}$

$\cos\theta=\pm\sqrt{\dfrac{1}{5}}=\pm\dfrac{1}{\sqrt{5}}$

王道 手順③ 手順①で考えた符号を元に絞り込む

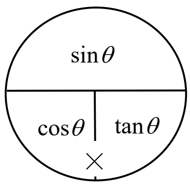
$\cos\theta<0$ なので $\cos\theta=-\dfrac{1}{\sqrt{5}}$

王道 手順④ $\tan\theta=\dfrac{\sin\theta}{\cos\theta}$ で残り１つを求める

$\sin\theta=\cos\theta\times\tan\theta$

$=-\dfrac{1}{\sqrt{5}}\times\dfrac{-2}{1}$

$=\dfrac{2}{\sqrt{5}}$

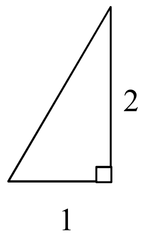


邪道 手順② 問題で与えられた三角比の値から直角三角形をイメージする

$\tan\theta=-2=-\dfrac{2}{1}$ より

図のような

直角三角形を考える



三平方の定理により

$x^2=2^2+1^2$，$x>0$ なので $x=\sqrt{5}$

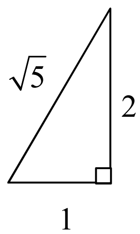
邪道 手順③ 手順①で考えた符号を元に絞り込む

$\sin\theta>0$，$\tan\theta<0$ なので

直角三角形より

$\sin\theta=\dfrac{2}{\sqrt{5}}$

$\cos\theta=-\dfrac{1}{\sqrt{5}}$

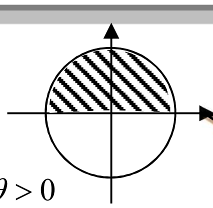


◇　$\sin\theta$が与えられたとき

例題） $\sin\theta=\dfrac{5}{13}$のとき，$\cos\theta$，$\tan\theta$の値を求めよ。ただし，$0^\circ\leqq\theta\leqq180^\circ$とする。

手順①　与えられた条件から、問題以外の三角比の符号を考える。（王道・邪道）

$0^\circ\leqq\theta\leqq180^\circ$，$\sin\theta=\dfrac{5}{13}>0$なので



図を書いて確認を。
問題文で$\sin\theta$が与えられているので、
求める$\cos\theta$，$\tan\theta$の符号を考える。

$0^\circ<\theta<90^\circ$（鋭角）のとき$\cos\theta>0,\ \tan\theta>0$

$90^\circ<\theta<180^\circ$（鈍角）のとき$\cos\theta<0,\ \tan\theta<0$

王道　手順②　$\sin^2\theta+\cos^2\theta=1$に問題で与えられた三角比の値を代入して計算する

$\left(\dfrac{5}{13}\right)^2+\cos^2\theta=1$　より　$\cos^2\theta=1-\dfrac{25}{169}$

$\cos^2\theta=\dfrac{169}{169}-\dfrac{25}{169}=\dfrac{144}{169}$

$\cos\theta=\pm\dfrac{12}{13}$

王道　手順③　手順①で考えた符号を元に絞り込む

王道　手順④　$\tan\theta=\dfrac{\sin\theta}{\cos\theta}$で残り１つを求める

$0^\circ<\theta<90^\circ$（鋭角）のとき

$\cos\theta>0$なので　$\cos\theta=\dfrac{12}{13}$

$\tan\theta=\dfrac{\sin\theta}{\cos\theta}=\sin\theta\div\cos\theta=\dfrac{5}{13}\div\dfrac{12}{13}=\dfrac{5}{12}$

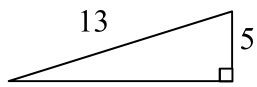
$90^\circ<\theta<180^\circ$（鈍角）のとき

$\cos\theta<0$なので　$\cos\theta=-\dfrac{12}{13}$

$\tan\theta=\dfrac{\sin\theta}{\cos\theta}=\sin\theta\div\cos\theta=\dfrac{5}{13}\div\left(-\dfrac{12}{13}\right)=-\dfrac{5}{12}$

邪道　手順②　問題で与えられた三角比の値から直角三角形をイメージする

$\sin\theta=\dfrac{5}{13}$より



図のような

直角三角形を考える

$1:2:\sqrt{3}$，$1:1:\sqrt{2}$
$3:4:5$，$5:12:13$
これらは覚えておく！

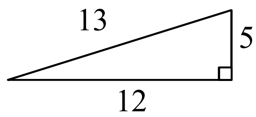
三平方の定理により

$x^2+5^2=13^2$，$x>0$なので　$x=12$

邪道　手順③　手順①で考えた符号を元に絞り込む

$0^\circ<\theta<90^\circ$（鋭角）のとき

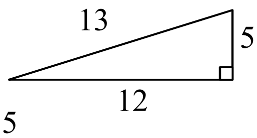
$\cos\theta>0,\ \tan\theta>0$なので



$\cos\theta=\dfrac{12}{13}$，$\tan\theta=\dfrac{5}{12}$

$90^\circ<\theta<180^\circ$（鈍角）のとき

$\cos\theta<0,\ \tan\theta<0$なので



$\cos\theta=-\dfrac{12}{13}$，$\tan\theta=-\dfrac{5}{12}$