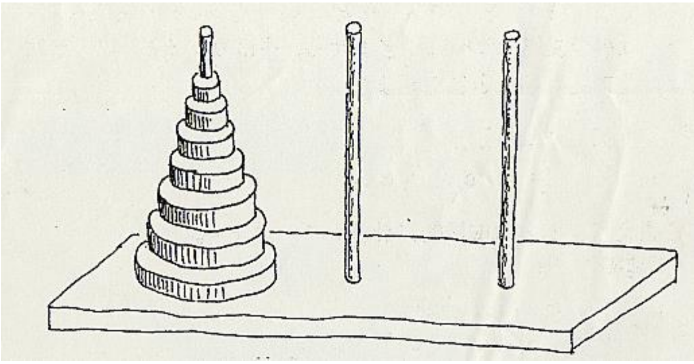
Tower of Hanoi

インドのガンジス河の畔のヴァラナシ（ベナレス）に、世界の中心を表すという巨大な寺院がある。そこには青銅の板の上に、長さ１キュビット、太さが蜂の体ほどの３本のダイヤモンドの針が立てられている。そのうちの１本には、天地創造のときに神が６４枚の純金の円盤を大きい円盤から順に重ねて置いた。これが「ハノイの塔」である。司祭たちはそこで、昼夜を通して円盤を別の柱に移し替えている。そして、全ての円盤の移し替えが終わったときに、世界は崩壊し終焉を迎える…

この移し替えには次のようなルールがある。

以下のルールに従って、すべての円盤を右端の杭に移動させられれば完成である。

○３本の杭と、中央に穴の開いた大きさの異なる複数の円盤から構成される。
○最初はすべての円盤が左端の杭に小さいものが上になるように順に積み重ねられている。
○円盤を一回に一枚ずつどれかの杭に移動させることができるが、小さな円盤の上に大きな円盤を乗せることはできない。



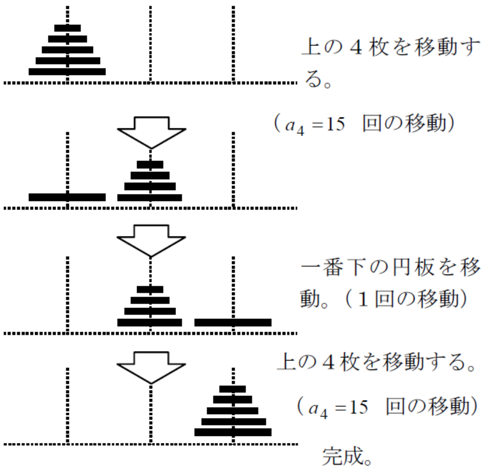
■実際に動かして回数を調べよう

枚数	１枚	２枚	３枚	４枚	５枚	６枚	７枚	８枚
必要 最低 回数								

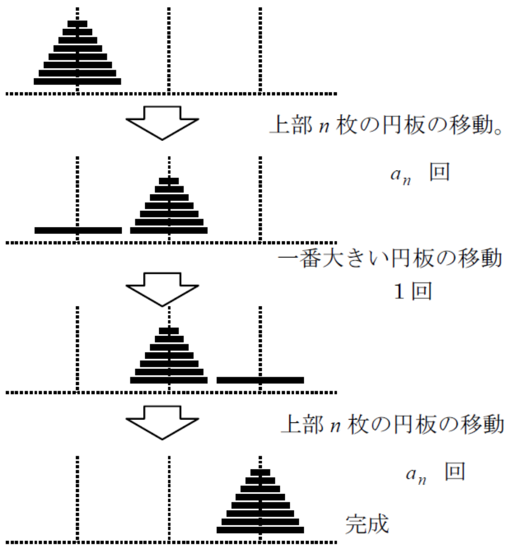
■６４枚を動かすには何回必要だろうか。推測して理由を述べてみよう。

64 枚の円盤を移動させるには、最低でも
（$2^{64}-1$）回 ＝ 18, 446, 744, 073, 709, 551, 615（1844 京 6744 兆 737 億 955 万 1615）回
かかり、1 枚移動させるのに 1 秒かかったとすると、最低でも約 5, 845 億年かかる（なお、ビッグバンは今から約 137 億年前に発生したとされている）。

解答１～漸化式を用いる



したがって、　$a_5=a_4+1+a_4=15+1+15=31$



したがって、　$a_{n+1}=2a_n+1$

よって　$a_1=1$，$a_{n+1}=2a_n+1$という漸化式がたつ

これを解くと，$a_{n+1}+1=2(a_n+1)$より

数列$\{a_n+1\}$は初項$a_1+1=1+1=2$，公比 2 の等比数列であるから

$a_n+1=2\cdot 2^{n-1}=2^n$　ゆえに　$a_n=2^n-1$

解答２～数学的帰納法を用いる

結果より$a_n=2^n-1$と推測できるので

ｉ）$n=1$（枚）のとき　$a_1=2^1-1=1$（回）となり成立する。

ii）$n=k$（枚）のとき　$a_k=2^k-1$（回）が成り立つと仮定する

$n=k+1$（枚）のとき　$a_{k+1}=2^{k+1}-1$（回）が成り立つことを示せば良いので

$(2^k-1)+1+(2^k-1)=2\times 2^k-1=2^{k+1}-1$（回）　ゆえに$n=k+1$（枚）のときも成立する

従ってｉ）ii）よりすべての自然数について　$a_n=2^n-1$が成立する