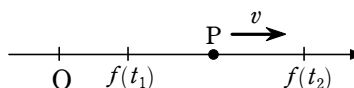


□速度と位置・道のり

数直線上を運動する点 P の時刻 t における座標を $x = F(t)$,
速度を $v = f(t)$ とすると、微分法で学んだように次が成り立つ。



$$v = \frac{dx}{dt} = f'(t) \quad \text{すなわち} \quad f(t) = \int v \, dt$$

$t = a$ から $t = b$ までの点 P の位置の変化量は $f(t_2) - f(t_1)$ であるから

$$\int_{t_1}^{t_2} v \, dt = \int_{t_1}^{t_2} f'(t) \, dt = \left[f(t) \right]_{t_1}^{t_2} = f(t_2) - f(t_1)$$

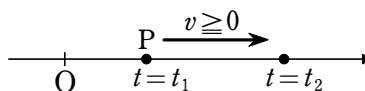
となる。これより $x = f(t_2) = f(t_1) + \int_{t_1}^{t_2} v \, dt$

瞬間的に進む量を
進んだ時間分積み重ねる(積分)

また時刻 t_1 から t_2 までに P が通過する総距離、すなわち **道のり** を s とする。

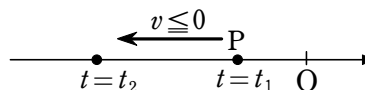
$t_1 \leq t \leq t_2$ で常に $v \geq 0$ ならば

$$s = \int_{t_1}^{t_2} v \, dt$$



$t_1 \leq t \leq t_2$ で常に $v \leq 0$ ならば

$$s = \int_{t_1}^{t_2} (-v) \, dt$$



「道のり」なので量は減らない

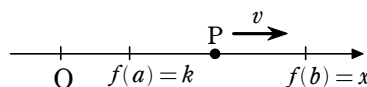
よって $t = t_1$ から $t = t_2$ までの点 P の 道のり は $|v|$ の定積分 $\int_{t_1}^{t_2} |v| \, dt$ で表される。

また、位置の変化量 $f(t_2) - f(t_1)$ と道のりが一致するのは、常に $f(t) \geq 0$ である場合に限る。

以上のことをまとめると、次のようになる。

速度と位置

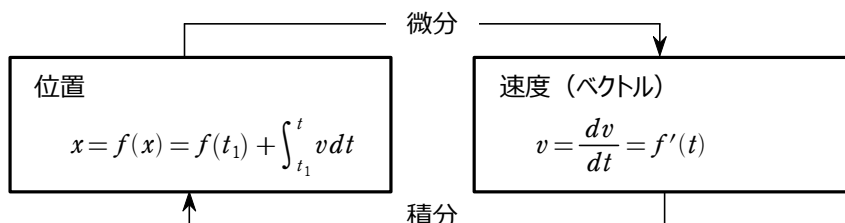
数直線上を運動する点 P の速度を $v = f(t)$ とし、
 $t = a$ のときの P の座標を k とする。



1 $t = b$ における P の座標 (位置) x は $x = k + \int_a^b v \, dt = k + \int_a^b f(t) \, dt$

2 $t = a$ から $t = b$ までの P の位置の変化量 s は $s = \int_a^b v \, dt = \int_a^b f(t) \, dt$

3 $t = a$ から $t = b$ までの P の道のり l は $l = \int_a^b |v| \, dt = \int_a^b |f(t)| \, dt$



例) 数直線上を運動する点 P の時刻 t における速度が $v = 8 - 2t$ で表されているとする。

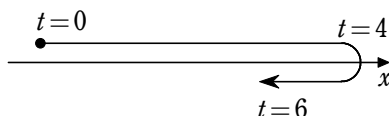
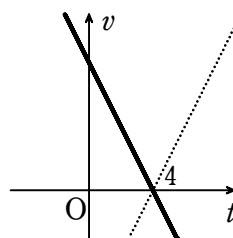
$t = 0$ から $t = 4$ までは $v > 0$, このときの点 P の位置の変化は

$$\int_0^4 (8 - 2t) dt = \left[8t - t^2 \right]_0^4 = (32 - 16) - 0 = 16$$

$t = 4$ から $t = 6$ までは $v < 0$, このときの点 P の位置の変化は

$$\begin{aligned} \int_4^6 (8 - 2t) dt &= \left[8t - t^2 \right]_4^6 = (48 - 36) - (32 - 16) \\ &= 12 - 16 = -4 \end{aligned}$$

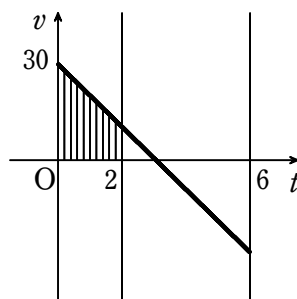
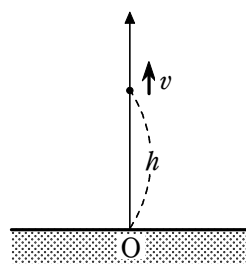
よって $16 - (-4) = 16 + 4 = 20$



例 1 2) 30 m/s の速さで地上から真上に打ち上げられた物体の t 秒後の速度 v m/s は、 $v = 30 - 9.8t$ で与えられるという。ただし、 $0 \leq t \leq 6$ である。
打ち上げられてから 2 秒後における物体の高さ h m は

$$\begin{aligned} h &= \int_0^2 (30 - 9.8t) dt \\ &= \left[30t - 4.9t^2 \right]_0^2 \\ &= 60 - 19.6 \\ &= 40.4 \quad (\text{m}) \end{aligned}$$

終

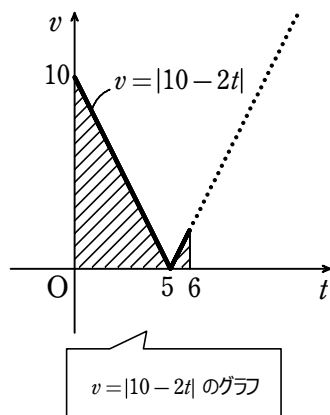


一般に $v = v_0 - gt$ (g : 重力加速度の大きさ, v_0 : 初速度) で表される落体の運動で、地上 h_0 m の位置から真上に打ち上げられた物体の t_1 秒後の高さ h m は $h = h_0 + \int_0^{t_1} (v_0 - gt) dt = h_0 + v_0 t_1 - \frac{1}{2} g t_1^2$

例 1 3) 数直線上を運動する点 P の時刻 t における速度 v が、
 $v = 10 - 2t$ ($0 \leq t \leq 6$) で与えられるとき、
 $t = 0$ から $t = 6$ までに P が通過する道のり s は

$$\begin{aligned} s &= \int_0^6 |10 - 2t| dt \\ &= \int_0^5 (10 - 2t) dt + \int_5^6 (-10 + 2t) dt \\ &= \left[10t - t^2 \right]_0^5 + \left[-10t + t^2 \right]_5^6 \\ &= (25 - 0) + \{-24 - (-25)\} \\ &= 26 \end{aligned}$$

終



<補足> 例 1 3 において、道のり s は斜線部分の面積の和に等しい。

□座標平面上を運動する点と道のり

座標平面上を運動する点 P が通過する道のりに
ついて考えてみよう。

点 P の時刻 t における座標 (x, y) を

$$x = f(t), \quad y = g(t)$$

とする。いま、時刻 t_1 から t までに P が通過する道のりを
 t の関数とみて、 $s(t)$ で表す。また、 t の増分 Δt に対する

$$s(t), \quad x = f(t), \quad y = g(t)$$

の増分を、それぞれ $\Delta s, \Delta x, \Delta y$ とする。

$\Delta t > 0$ で Δt が十分小さいときは

$$\Delta s \doteq \sqrt{(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2}$$

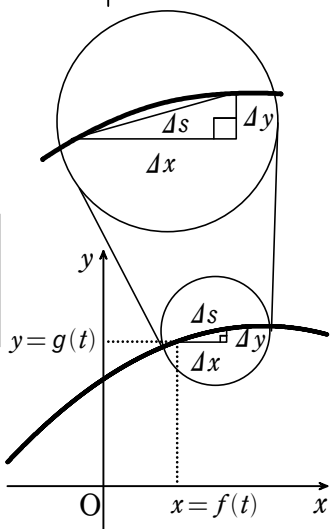
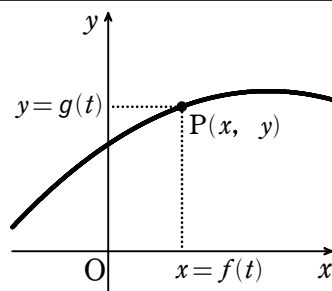
と考えられるから、 Δt で割ると

$$\frac{\Delta s}{\Delta t} \doteq \frac{1}{\Delta t} \sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2} = \sqrt{\left(\frac{1}{\Delta t}\right)^2 \cdot (\Delta x^2 + \Delta y^2)}$$

$$\frac{\Delta s}{\Delta t} \doteq \sqrt{\left(\frac{\Delta x}{\Delta t}\right)^2 + \left(\frac{\Delta y}{\Delta t}\right)^2}$$

である。 $\Delta t < 0$ のときも同様である。

直角三角形が小さくなれば
なるほど、斜辺と曲線の差が
小さくなる



ここで、 $\Delta t \rightarrow 0$ のときの極限を考えると、次が成り立つ。

$$s'(t) = \sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2}$$

導関数の定義

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{d}{dx} f(x) \\ &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} \end{aligned}$$

時刻 t における P の速度 $\vec{v}$ は $\vec{v} = \left(\frac{dx}{dt}, \frac{dy}{dt}\right)$ であるので $|\vec{v}| = \sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2}$ であるから、

$t = t_1$ から $t = t_2$ までに点 P が通過する道のり $s(t_2) - s(t_1)$ は、定積分の定義により

$$s(t_2) - s(t_1) = \int_{t_1}^{t_2} \sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2} dt = \int_{t_1}^{t_2} |\vec{v}| dt$$

速度がわかれば、
道のりが求められる

上の結果から、 $s'(t) = |\vec{v}|$ が成り立つ。

以上から、次のことが成り立つ。

座標平面上を運動する点と道のり

座標平面上を運動する点 P(x, y) の時刻 t における x 座標、

y 座標が t の関数で表されるとき、時刻 t_1 から t_2 までに P が通過する道のり s は

$$s = \int_{t_1}^{t_2} \sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2} dt = \int_{t_1}^{t_2} |\vec{v}| dt$$

積分法とその応用【曲線の長さと道のり】 p.181～187

例題 17 座標平面上を運動する点 P の時刻 t における座標 (x, y) が $x=2t^3$, $y=3t^2$ で表されるとき, $t=0$ から $t=\sqrt{3}$ までに P が通過する道のり s を求めよ。

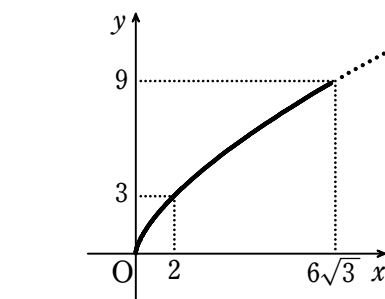
解答 $\frac{dx}{dt}=6t^2$, $\frac{dy}{dt}=6t$ であるから

$$s = \int_0^{\sqrt{3}} \sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2} dt$$

$$= \int_0^{\sqrt{3}} \sqrt{(6t^2)^2 + (6t)^2} dt$$

$$= \int_0^{\sqrt{3}} 6t\sqrt{t^2+1} dt$$

$t^2+1=u$ とおくと $2t dt=du$
 t と u の対応は右のようになる。



t	$0 \rightarrow \sqrt{3}$
u	$1 \rightarrow 4$

よって $s = \int_0^{\sqrt{3}} 6t\sqrt{t^2+1} dt$

$$= \int_0^{\sqrt{3}} 3\sqrt{t^2+1} \cdot 2t dt = \int_1^4 3\sqrt{u} du = \left[2u\sqrt{u} \right]_1^4 = 14$$

□媒介変数表示された曲線の長さ

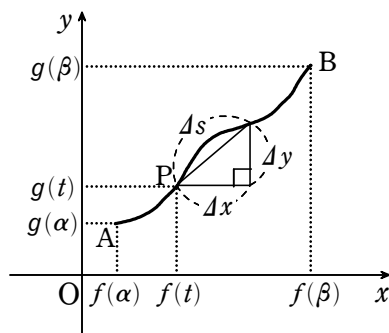
曲線の方程式が媒介変数 t を用いて $x=f(t)$, $y=g(t)$ ($\alpha \leq t \leq \beta$) と表され, $f(t)$, $g(t)$ の導関数はともに連続であるとき, この曲線の長さ L を定積分で表してみよう。

A($f(\alpha)$, $g(\alpha)$), B($f(\beta)$, $g(\beta)$) とし, 点 A から点 P($f(t)$, $g(t)$) までの曲線の長さを, t の関数と考えて, $s(t)$ で表す。また, t の増分 Δt に対する $s(t)$, $f(t)$, $g(t)$ の増分を, それぞれ Δs , Δx , Δy とすると,

$|\Delta t|$ が十分小さいとき

$$|\Delta s| \doteq \sqrt{(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2} \quad \cdots \cdots \textcircled{1}$$

と考えてよい。



点 P が曲線上を A から B に向かって動くとき,

$s(t)$ は単調に増加する t の関数で, Δt と Δs は同符号である。

よって, $\textcircled{1}$ から

$$\frac{\Delta s}{\Delta t} \doteq \sqrt{\left(\frac{\Delta x}{\Delta t}\right)^2 + \left(\frac{\Delta y}{\Delta t}\right)^2} \quad \cdots \cdots \textcircled{2}$$

$\Delta t \rightarrow 0$ のとき、②の両辺の差は0に近づくから

$$\frac{ds}{dt} = \sqrt{\{f'(t)\}^2 + \{g'(t)\}^2}$$

導関数の定義

$$f'(x) = \frac{d}{dx} f(x)$$

$$= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}$$

よって、 $s(t)$ は t の関数 $\sqrt{\{f'(t)\}^2 + \{g'(t)\}^2}$ の不定積分の1つで

$$\int \sqrt{\{f'(t)\}^2 + \{g'(t)\}^2} dt = s(t) \quad \text{であるから}$$

$$\int_{\alpha}^{\beta} \sqrt{\{f'(t)\}^2 + \{g'(t)\}^2} dt = \left[s(t) \right]_{\alpha}^{\beta} = s(\beta) - s(\alpha)$$

ここで、 $s(\alpha) = 0$ 、 $s(\beta) = L$ であるから、次のことが成り立つ。

$$L = \int_{\alpha}^{\beta} \sqrt{\{f'(t)\}^2 + \{g'(t)\}^2} dt$$

α までだと長さ0

β までだと長さ全部

以上の結果をまとめると、次のようになる。

注意 同じ曲線上を動点が繰り返し動くときは道のりと曲線の長さは一致しない

媒介変数表示された曲線の長さ

曲線 $x = f(t)$ 、 $y = g(t)$ ($\alpha \leq t \leq \beta$) の長さ L は

$$L = \int_{\alpha}^{\beta} \sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2} dt = \int_{\alpha}^{\beta} \sqrt{\{f'(t)\}^2 + \{g'(t)\}^2} dt$$

例 1 4) 次の曲線の長さ L を求める。ただし、 $r > 0$ とする。

$$x = r \cos t, \quad y = r \sin t \quad (0 \leq t \leq 2\pi)$$

$$\frac{dx}{dt} = -r \sin t, \quad \frac{dy}{dt} = r \cos t \quad \text{であるから}$$

$$L = \int_0^{2\pi} \sqrt{r^2 \sin^2 t + r^2 \cos^2 t} dt$$

$$= \int_0^{2\pi} \sqrt{r^2 (\sin^2 t + \cos^2 t)} dt$$

$$= \int_0^{2\pi} r dt$$

相互関係

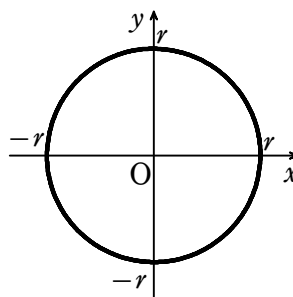
$$= r \int_0^{2\pi} dt$$

$$= r \left[t \right]_0^{2\pi}$$

$$= 2\pi r$$

t の関数についての積分なので r は外へ

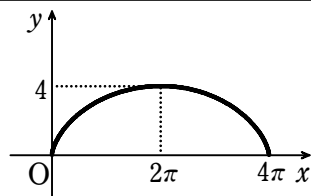
終



例 1 4 の曲線は、半径 r の円である。例 1 4 の計算で、半径 r の円の周の長さが、 $2\pi r$ になることが示された。

例題 18) 次のサイクロイドの長さ L を求めよ。

$$x = 2(t - \sin t), \quad y = 2(1 - \cos t) \quad (0 \leq t \leq 2\pi)$$



解答 $\frac{dx}{dt} = 2(1 - \cos t), \quad \frac{dy}{dt} = 2\sin t$ であるから

$$\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2 \quad \leftarrow \text{ルートの中のみをまず計算}$$

$$= \{2(1 - \cos t)\}^2 + (2\sin t)^2$$

$$= 4(1 - 2\cos t + \cos^2 t + \sin^2 t)$$

$$= 4(1 - 2\cos t + 1)$$

$$= 4(2 - 2\cos t)$$

$$= 8(1 - \cos t)$$

$$= 16\sin^2 \frac{t}{2}$$

$$= \left(4\sin \frac{t}{2}\right)^2$$

半角の公式 $\sin^2 \frac{\theta}{2} = \frac{1 - \cos \theta}{2}$ より

$$16 \text{ 倍して } 16\sin^2 \frac{\theta}{2} = 8(1 - \cos \theta)$$

相互関係

$0 \leq t \leq 2\pi$ のとき, $\sin \frac{t}{2} \geq 0$ であるから

$$L = \int_0^{2\pi} \sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2} dt$$

$$= \int_0^{2\pi} \sqrt{\left(4\sin \frac{t}{2}\right)^2} dt$$

絶対値は + ()

$$= \int_0^{2\pi} 4\sin \frac{t}{2} dt$$

$$= 4 \left[-2\cos \frac{t}{2} \right]_0^{2\pi}$$

$$= 16$$

$a > 0$ とする。 θ を媒介変数として、媒介変数表示

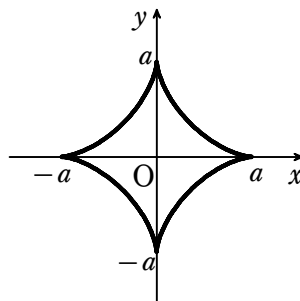
$$x = a\cos^3 \theta, \quad y = a\sin^3 \theta \quad (0 \leq \theta \leq 2\pi)$$

の表す曲線は、右の図のようになる。

この曲線を **アステロイド** という。この曲線は

x 軸および y 軸に関して対称である。

このことを用いて練習 49 を考えてみよう。



□ 曲線 $y=f(x)$ (陽関数) の長さ

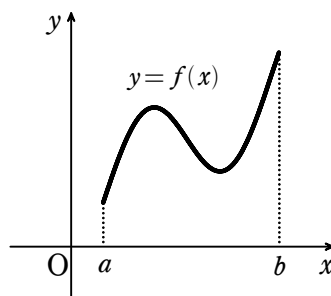
曲線 $y=f(x)$ ($a \leq x \leq b$) は、
媒介変数 t を用いて

$$x=t, \quad y=f(t) \quad (a \leq t \leq b)$$

と表される。

$$\frac{dx}{dt}=1, \quad \frac{dy}{dt}=\frac{dy}{dx} \cdot \frac{dx}{dt}=f'(x)$$

であるから、次のことが成り立つ。



曲線 $y=f(x)$ の長さ

曲線 $y=f(x)$ ($a \leq x \leq b$) の長さ L は

$$L=\int_a^b \sqrt{1+[f'(x)]^2} dx=\int_a^b \sqrt{1+y'^2} dx$$

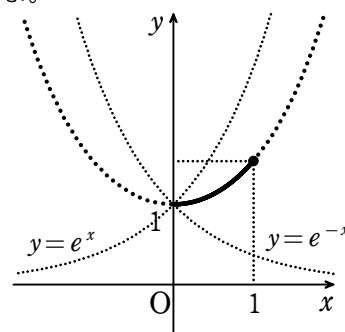
例題 19) 曲線 $y=\frac{e^x+e^{-x}}{2}$ ($0 \leq x \leq 1$) の長さ L を求めよ。

解答 $y'=\frac{e^x-e^{-x}}{2}$ であるから

$$\begin{aligned} 1+y'^2 &= 1+\left(\frac{e^x-e^{-x}}{2}\right)^2 \\ &= \left(\frac{e^x+e^{-x}}{2}\right)^2 \end{aligned}$$

$$\frac{e^x+e^{-x}}{2} > 0 \text{ であるから}$$

$$\begin{aligned} L &= \int_0^1 \frac{e^x+e^{-x}}{2} dx \\ &= \frac{1}{2} \left[e^x - e^{-x} \right]_0^1 \\ &= \frac{1}{2} \left(e - \frac{1}{e} \right) \end{aligned}$$



注意 $a > 0$ とする。 $y=\frac{a}{2}\left(e^{\frac{x}{a}}+e^{-\frac{x}{a}}\right)$ で表される

曲線を **懸垂線** または **カタナリー**(catenary) という。
ロープや電線など太さと重さの様な綱の両端を持って垂らしたときに、自身の重さで垂れ下がったときにできる形である。

補足 カテナリーの名はホイヘンスによるもので、“catena”(カテーナ、ラテン語で「鎖、絆」の意) に由来する。カタナリー曲線をあらわす式を最初に得たのはヨハン・ベルヌーイ、ライプニッツらである(1691年)。

カタナリー曲線の形状は、まさに線状の物体に加わる重力とそれぞれの部分に加わる両サイドからの張力のバランスの中で形成されている。この関係が微分方程式となり、その微分方程式を解くことでカタナリー曲線の式が得られることになる。

カタナリー曲線は、送電線や鉄道の架線、電線、侵入防止用の鎖、斜張橋(Cable-stayed bridge)など日常生活の多くの場面で観察される。