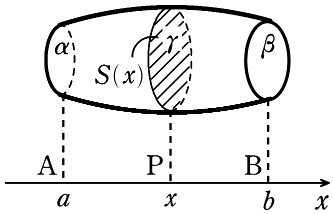
積分法とその応用【体積】　p.174～180

□体　積

立体図形の体積についても，区分求積法の考えを利用して定積分で表すことができる。

右の図のように，立体が x 軸に垂直な 2 平面 α，β に挟まれているとする。この挟まれた部分の体積を V とし，2 平面 α，β と x 軸との交点 A，B の座標を，それぞれ a，b とする。ただし，$a<b$ である。

このとき，座標が x である点 P を通り，x 軸に垂直な平面 γ で立体を切ったときの断面積を $S(x)$ とすると，体積 V は次の式で与えられる。



> 断面積 $S(x)$ と立体の体積 V
>
> $$V=\int_a^b S(x)\,dx \qquad \text{ただし，}a<b$$

定積分と体積

【解説】区間 $a \leqq x \leqq b$ を n 等分して，

その分点の座標を，a に近い方から順に

x_1，x_2，x_3，……，x_{n-1}

とし，次のようにおく。

$a=x_0$，$b=x_n$，$\dfrac{b-a}{n}=\varDelta x$

そして，各分点を通り，x 軸に垂直な平面でこの立体を分割する。このとき

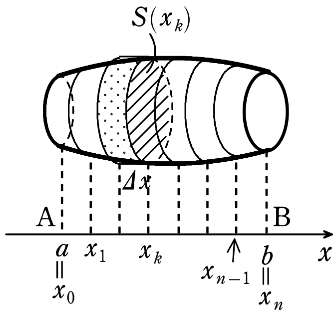
$$V_n=S(x_1)\varDelta x+S(x_2)\varDelta x+\cdots\cdots+S(x_n)\varDelta x$$
$$=\sum_{k=1}^{n} S(x_k)\varDelta x$$

細分化された円柱の和

とすると，$n \longrightarrow \infty$ のとき，

$V_n \longrightarrow V$ と考えられる。

細分化された円柱の厚さを薄くしていく⇒なめらかになっていく



$x_k=a+k\varDelta x$

底面が通過した部分が体積

⇩

底面を a から b まで積み重ねたものが体積

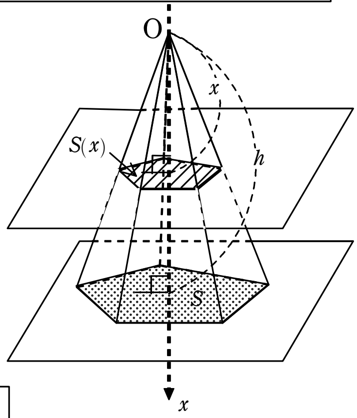
よって，「区分求積法と定積分」の関係から

$$V=\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n} S(x_k)\varDelta x=\int_a^b S(x)\,dx$$ 終

積分法とその応用【体積】　p.174～180

例）　底面積が S，高さが h の角錐の体積 V を，積分を用いて求めよ。

注意 図は五角形で書いているが，
特に指定があるわけではない
（多角形なら何でも良い）



解答　この直円錐の頂点から底面に垂線を下ろし，
これを x 軸とし，頂点を原点 O にとる。
（下の図のように見た方がわかりこともある）

どのように x 軸をとるかで簡単にも難しくもなるので、うまくとるのがポイント

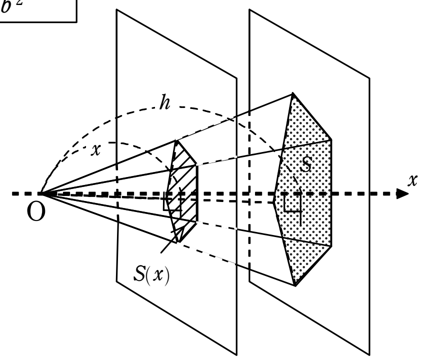
x 軸上の座標が x である点を通り，x 軸に垂直な
平面で角錐を切ったときの断面積を $S(x)$ とする。
この断面は底面の多角形と相似である。

断面積（x 軸と垂直な平面）を x の式で表せれば、後は積分

高さの比が $x:h$ であるから相似比も $x:h$
断面と底面の相似比は $x:h$ であるから，
面積比は

$$S(x):S=x^2:h^2$$
$$x^2\cdot S=h^2\cdot S(x)$$

相似比が $a:b$ ならば
面積比は $a^2:b^2$



よって　$S(x)=\dfrac{S}{h^2}x^2$

$S(x)$ は x の関数

したがって　$V=\displaystyle\int_0^h S(x)\,dx$

$\dfrac{S}{h^2}$ は x の無関係なので
外に出す

$$=\int_0^h \frac{S}{h^2}x^2dx$$
$$=\frac{S}{h^2}\int_0^h x^2dx$$
$$=\frac{S}{h^2}\left[\frac{x^3}{3}\right]_0^h$$
$$=\frac{S}{h^2}\cdot\frac{h^3}{3}$$
$$=\frac{1}{3}Sh$$

三角錐の体積

底面が通過した部分が体積
⇩
底面を a から b まで
積み重ねたものが体積
⇩
底面は（一定の）変形を
していてもＯＫ

例題１４はこの角錐の底面が三角形のときである。では練習３９へ…ではあるが
練習３９は底面が半径 r の円となる訳であるから $S=\pi r^2$

よって　$S(x):S=x^2:h^2$ より $S(x)=\dfrac{S}{h^2}x^2=\dfrac{\pi r^2}{h^2}x^2$

これを 0 から h まで積分すればよいので $V=\displaystyle\int_0^h S(x)\,dx=\int_0^h\frac{S}{h^2}x^2dx=\frac{S}{h^2}\left[\frac{x^3}{3}\right]_0^h=\frac{S}{h^2}\cdot\frac{h^3}{3}$

$$=\frac{1}{3}Sh=\frac{1}{3}\pi r^2h$$

（$V=\dfrac{1}{3}Sh$ に $S=\pi r^2$ を代入しても結果は同じ）

積分法とその応用【体積】　p.174～180

応用例題１０）

半径 a の円 O がある。この直径 AB 上の点 P を通り直線 AB に垂直な弦 QR を底辺とし，高さが h である二等辺三角形を，円 O の面に対して垂直に作る。

P が A から B まで動くとき，この三角形が通過してできる立体の体積 V を求めよ。

方針 … 円の中心 O を原点に，直線 AB を x 軸にとる。点 P の座標を x とし，

二等辺三角形の面積を x の式で表す。

適当な座標軸を設けて、断面積を x の式で表し、範囲をスライドさせられればよい。

解答　円の中心 O を原点に，直線 AB を x 軸にとる。

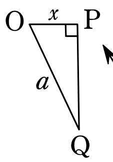
点 P の座標を x とすると

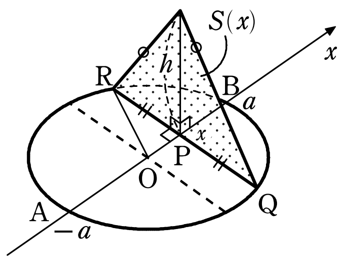
（△OPQにおいて三平方の定理により）

$$PQ=\sqrt{a^2-x^2}$$

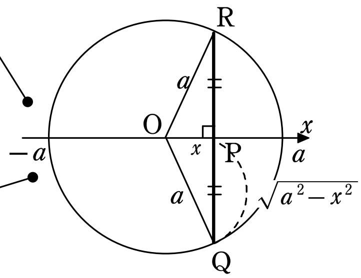
$$QR=2PQ$$

$$=2\sqrt{a^2-x^2}$$





（底面） 上から見ると…



よって，線分 QR を底辺とする

高さ h の二等辺三角形の面積 $S(x)$ は

$$S(x)=\frac{1}{2}\cdot 2\sqrt{a^2-x^2}\cdot h$$

$$=h\sqrt{a^2-x^2}$$

したがって

$$V=\int_{-a}^{a}S(x)\,dx$$

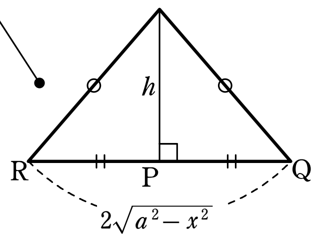
x の範囲は $-a$ から a まで

$$=\int_{-a}^{a}h\sqrt{a^2-x^2}\,dx$$

$$=h\cdot\int_{-a}^{a}\sqrt{a^2-x^2}\,dx$$

$$=h\cdot\frac{1}{2}\pi a^2$$

$$=\frac{1}{2}\pi a^2 h$$



<補足>　$\int_{-a}^{a}\sqrt{a^2-x^2}\,dx$ は，

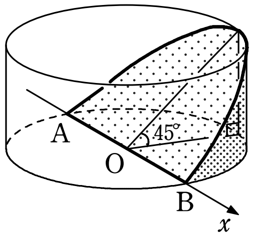
半径 a の円の面積の半分で $\frac{1}{2}\pi a^2$ である。

三角形が通過してできる立体

または
３Ｄ－ＧＲＡＰＥＳで
設定を変えながら、
できあがる立体を確認しよう

積分法とその応用【体積】　p.174～180

練習４０）　底面の半径が a で高さも a である直円柱がある。
この底面の直径 AB を含み底面と 45° の傾きをなす平面で，
直円柱を 2 つの立体に分けるとき，
小さい方の立体の体積 V を求めよ。

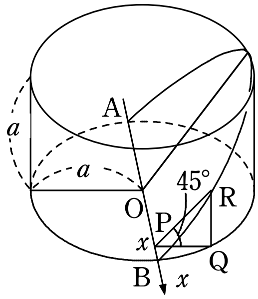


3D−GRAPESで
できあがる立体を確認しよう

解答

底面の円の中心 O を原点に，直線 AB を x 軸にとする。
線分 AB 上の点 P を通り，x 軸に垂直な平面で立体を
切ったときの断面を右の図のように △PQR とし，
P の座標を x とすると　$\mathrm{PO}=x$

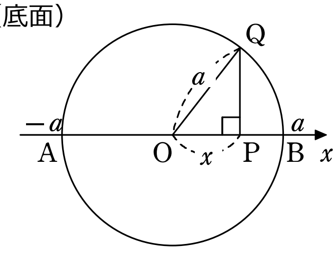
$$\mathrm{PQ}=\mathrm{QR}=\sqrt{a^2-x^2}$$



よって，△PQR の面積を $S(x)$ とすると

$$S(x)=\frac{1}{2}\mathrm{PQ}\cdot\mathrm{QR}$$
$$=\frac{1}{2}\cdot\sqrt{a^2-x^2}\cdot\sqrt{a^2-x^2}$$
$$=\frac{1}{2}(a^2-x^2)$$

（底面）



したがって

$$V=\int_{-a}^{a}\frac{1}{2}(a^2-x^2)dx$$

範囲は
$-a$ から a まで

$$=\int_0^a(a^2-x^2)dx$$
$$=\left[a^2x-\frac{x^3}{3}\right]_0^a$$
$$=\frac{2}{3}a^3$$

深める　練習40 の立体（体積を求める立体）を，いろいろな平面で切ってみよう。
それぞれの平面で切ったときの断面はどのような図形になるだろうか。

数学Ⅲ
立体の断面

①直線ABに垂直な平面：直角二等辺三角形　$V=\int_{-a}^{a}\frac{1}{2}(a^2-x^2)dx=\left[a^2x-\frac{x^3}{3}\right]_0^a=\frac{2}{3}a^3$

②底面の中心Oを通り直線ABに垂直な底面上の直線について、この直線に垂直な平面：長方形

$$V=\int_0^a 2x\sqrt{a^2-x^2}\,dx=-\left[-\frac{2}{3}(a^2-x^2)\right]_0^a=\frac{2}{3}a^3$$

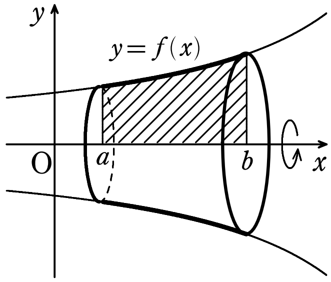
③底面に平行な平面で切ったとき：弓なような形

$$V=\int_{\frac{\pi}{2}}^{0}\left(a^2\theta-\frac{1}{2}a^2\sin 2\theta\right)\cdot(-a\sin\theta)d\theta=a^3\int_0^{\frac{\pi}{2}}\left(\theta\sin\theta-\frac{1}{2}\sin 2\theta\sin\theta\right)d\theta$$

$$=a^3\left[(-\theta\cos\theta+\sin\theta)-\left(\frac{1}{4}\sin\theta-\frac{1}{12}\sin 3\theta\right)\right]_0^{\frac{\pi}{2}}=\frac{2}{3}a^3$$

積分法とその応用【体積】　p.174～180

□x 軸の周りの回転体の体積



右の図のように，曲線 $y=f(x)$ と x 軸および 2 直線 $x=a$，$x=b$ で囲まれた部分が，x 軸の周りに 1 回転してできる回転体の体積 V を考えてみよう。

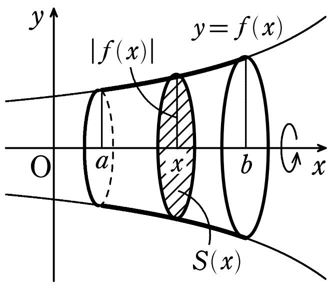
断面積 $S(x)$ と立体の体積 Vは

$$V=\int_a^b S(x)dx \qquad \text{ただし，} a<b$$

である。回転体の場合，点 $(x,\ 0)$ を通り，x 軸に垂直な平面でこの回転体を切ると，断面は半径が $|f(x)|$ の円である。その断面積を $S(x)$ とすると

$$S(x)=\pi|f(x)|^2=\pi\{f(x)\}^2$$

であるから，次の公式が成り立つ。



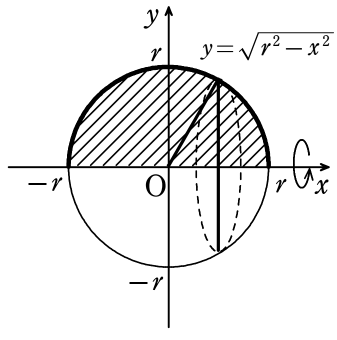
x 軸の周りの回転体の体積

$$V=\pi\int_a^b\{f(x)\}^2dx=\pi\int_a^b y^2dx$$

ただし，$a<b$

$f(x)$ や y は回転体の外周になる線

例題１５） 半径 r の球の体積 V は，$V=\dfrac{4}{3}\pi r^3$ であることを示せ。



解答　半径 r の球は，区間 $-r\leqq x\leqq r$ において半円 $y=\sqrt{r^2-x^2}$ と x 軸で囲まれた部分が，x 軸の周りに 1 回転してできる。

よって　　π を忘れずに！

$$V=\pi\int_{-r}^{r}y^2dx$$

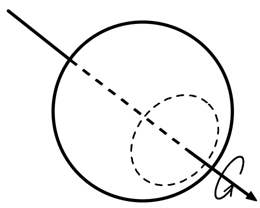
$$=\pi\int_{-r}^{r}(r^2-x^2)dx$$

$$=2\pi\int_0^r(r^2-x^2)dx$$

$$=2\pi\left[r^2x-\frac{x^3}{3}\right]_0^r$$

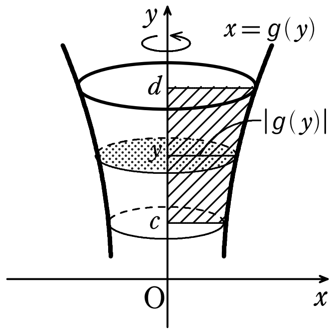
$$=\frac{4}{3}\pi r^3$$

身の上に心配あると参上（球の体積の公式）



□y 軸の周りの回転体の体積

右の図のように，曲線 $x=g(y)$ と y 軸および 2 直線 $y=c$，$y=d$ で囲まれた部分が，y 軸の周りに 1 回転してできる回転体の体積 V を考えてみよう。この場合も，x 軸の周りの回転体の体積と同様に考えれば，次の公式が成り立つ。



y 軸の周りの回転体の体積

$$V=\pi\int_c^d \{g(y)\}^2 dy=\pi\int_c^d x^2 dy$$

ただし，$c<d$

例題１６） 放物線 $y=x^2-2$ と直線 $y=3$ で囲まれた部分が，y 軸の周りに 1 回転してできる回転体の体積 V を求めよ。

解答　$y=x^2-2$ を x について整理すると

$y+2=x^2$

$\pm\sqrt{y+2}=x$

$x\geqq 0$ とすると　$x=\sqrt{y+2}$

この曲線を

y 軸の周りに回転させると

$$V=\pi\int_{-2}^{3} x^2 dy$$

$$=\pi\int_{-2}^{3}(y+2)dy$$

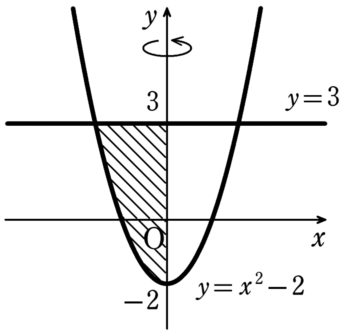
$$=\pi\left[\frac{y^2}{2}+2y\right]_{-2}^{3}$$

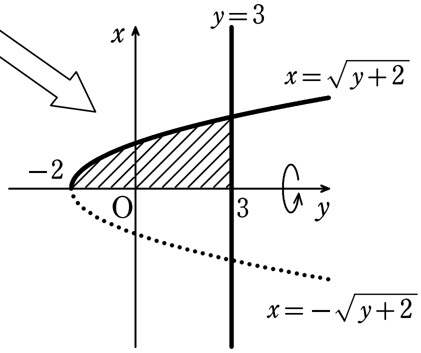
$$=\pi\left\{\left(\frac{9}{2}+6\right)-\left(\frac{4}{2}-4\right)\right\}$$

$$=\pi\left(\frac{9}{2}-\frac{4}{2}+6+4\right)$$

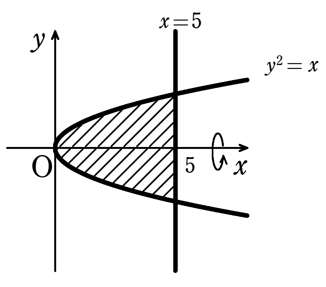
$$=\pi\left(\frac{5}{2}+\frac{20}{2}\right)$$

$$=\frac{25}{2}\pi$$



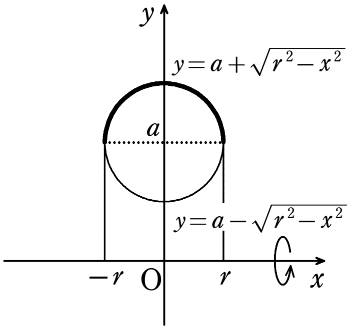


このように移動して求めても同じである



積分法とその応用【体積】 p.174～180

応用例題１１） $0<r<a$ とする。円 $x^2+(y-a)^2=r^2$を x 軸の周りに 1 回転してできる回転体の体積 V を求めよ。



解答 $x^2+(y-a)^2=r^2$ を y について解くと

$(y-a)^2=r^2-x^2$

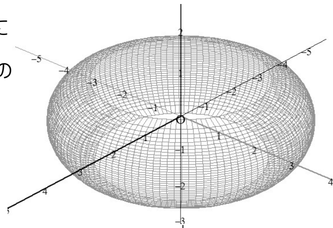
$y-a=\pm\sqrt{r^2-x^2}$

$\therefore \quad y=a\pm\sqrt{r^2-x^2}$

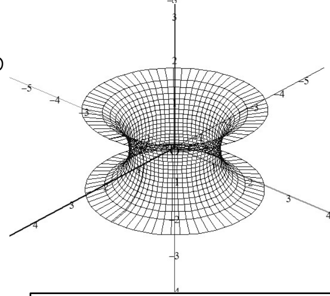
半円 $y=a+\sqrt{r^2-x^2}$ と x 軸および 2 直線 $x=-r$，$x=r$ で囲まれた部分が x 軸の周りに 1 回転してできる回転体の体積を V_1，

半円 $y=a-\sqrt{r^2-x^2}$ と x 軸および 2 直線 $x=-r$，$x=r$ で囲まれた部分が x 軸の周りに 1 回転してできる回転体の体積を V_2 とすると

V_1 を横に倒したもの



V_2 を横に倒したもの



$$V_1=\pi\int_{-r}^{r}\left(a+\sqrt{r^2-x^2}\right)^2dx$$

$$V_2=\pi\int_{-r}^{r}\left(a-\sqrt{r^2-x^2}\right)^2dx$$

よって $V=V_1-V_2$

$$=4\pi a\boxed{\int_{-r}^{r}\sqrt{r^2-x^2}\,dx}$$

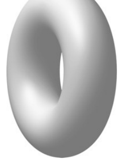
$$=4\pi a\cdot\boxed{\frac{1}{2}\pi r^2}$$

$$=2\pi^2r^2a$$

●展開してもよいが $(A+B)^2-(A-B)^2=4AB$とみて

原点中心，半径 r の円の半円の面積

補足 応用例題の回転体は右のようになる。この立体を**円環体（トーラス）** という。



別解 パップスーギュルダンの定理

詳しい説明は省略しますが…簡単に説明すると

（回転体の体積）＝（回転させたい図形の面積）×（重心の動いた距離）

（回転体の表面積）＝（回転させたい図形の周囲の長さ）×（重心の動いた距離）

ただし重心の求め方や、図形が自分自身と重ならないことなど注意も必要

例 回転させたい図形（円）の面積は πr^2

円の重心は中心なので，中心の軌道は半径 a の円の円周と一致する ゆえに $2\pi a$

したがって $V=\pi r^2\times 2\pi a=2\pi^2r^2a$

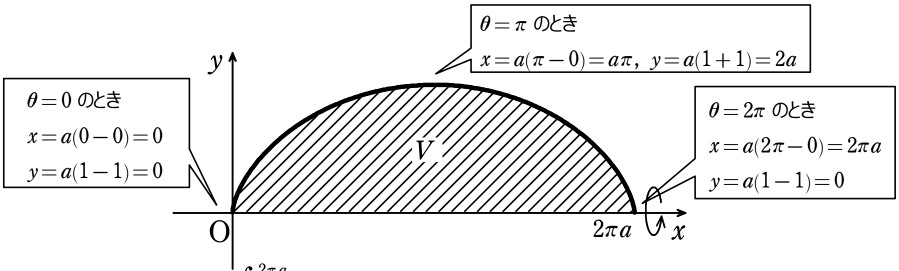
積分法とその応用【体積】 p.174～180

応用例題１２） $a>0$ とする。サイクロイド

$$x=a(\theta-\sin\theta),\quad y=a(1-\cos\theta)\ (0\leqq\theta\leqq 2\pi)$$

と x 軸で囲まれた部分が，x 軸の周りに 1 回転してできる回転体の体積 V を求めよ。

考え方 … 面積の場合と同じように，置換積分法を利用する。



解答　体積 V は　$V=\pi\int_0^{2\pi a} y^2dx$，

$x=a(\theta-\sin\theta)$ であるから θ で微分すると　$\dfrac{dx}{d\theta}=a(1-\cos\theta)$

よって　$dx=a(1-\cos\theta)d\theta$

x と θ の対応は右のようになる。

x	$0 \longrightarrow 2\pi a$
θ	$0 \longrightarrow 2\pi$

上のグラフから対応が分かる

よって，置換積分法により

$$V=\pi\int_0^{2\pi a} y^2dx$$
$$=\pi\int_0^{2\pi} a^2(1-\cos\theta)^2\cdot a(1-\cos\theta)d\theta$$

$y=a(1-\cos\theta)$
$dx=a(1-\cos\theta)d\theta$
範囲の変換

$$=\pi a^3\int_0^{2\pi}(1-\cos\theta)^3d\theta$$
$$=\pi a^3\int_0^{2\pi}(1-3\cos\theta+3\cos^2\theta-\cos^3\theta)d\theta$$

ここで部分ごとに計算すると

$$\int_0^{2\pi}d\theta=2\pi,\quad \int_0^{2\pi}\cos\theta\,d\theta=\Big[\sin\theta\Big]_0^{2\pi}=0$$

$$\int_0^{2\pi}\cos^2\theta\,d\theta=\int_0^{2\pi}\frac{1}{2}(1+\cos 2\theta)d\theta=\frac{1}{2}\Big[\theta+\frac{1}{2}\sin 2\theta\Big]_0^{2\pi}=\pi$$

$$\int_0^{2\pi}\cos^3\theta\,d\theta=\int_0^{2\pi}(1-\sin^2\theta)\cos\theta\,d\theta$$
$$=\Big[\sin\theta-\frac{1}{3}\sin^3\theta\Big]_0^{2\pi}=0$$

$f(\sin\theta)\cos\theta$ の定積分
置き換えずに処理できるようになっていこう

したがって

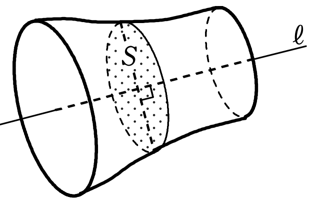
$$V=\pi a^3(2\pi-3\cdot 0+3\cdot\pi-0)=5\pi^2a^3$$

別解　$\cos 3\theta=-3\cos\theta+4\cos^3\theta$ より　$\cos^3\theta=\dfrac{1}{4}(\cos 3\theta+3\cos\theta)$

$$\frac{1}{4}\int_0^{2\pi}(\cos 3\theta+3\cos\theta)d\theta=\frac{1}{4}\Big[\frac{1}{3}\sin 3\theta+3\sin\theta\Big]_0^{2\pi}=0$$

積分法とその応用【体積】 p.174～180

研究 一般の回転体の体積



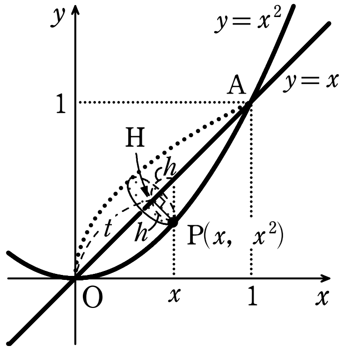
空間における直線 ℓ の周りの回転体の体積を求めるには，直線 ℓ に垂直な平面で回転体を切った切り口の面積 S の定積分を考えればよい。

例えば，放物線 $y=x^2$ と直線 $y=x$ で囲まれた部分を，直線 $y=x$ の周りに 1 回転させてできる立体の体積 V を求めてみよう。

放物線と直線の交点は $\mathrm{O}(0,\ 0)$，$\mathrm{A}(1,\ 1)$ で，$\mathrm{OA}=\sqrt{2}$ である。

$0\leqq x\leqq 1$ とし，放物線上の点 $\mathrm{P}(x,\ x^2)$ から直線に垂線 PH を下ろし，

$\mathrm{PH}=h$，$\mathrm{OH}=t$ とおく。



H を通り，直線 $y=x$ に垂直な平面による立体の切り口の面積を $S(t)$ とすると

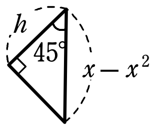
$$V=\int_0^{\sqrt{2}} S(t)\,dt$$

$$=\pi\int_0^{\sqrt{2}} h^2dt$$

ここで　$1:\sqrt{2}=h:(x-x^2)$

$$\sqrt{2}\,h=x-x^2$$

$$\therefore\quad h=\frac{x-x^2}{\sqrt{2}}$$



また　$t=\sqrt{2}\,x-h=\dfrac{x+x^2}{\sqrt{2}}$

t	$0 \longrightarrow \sqrt{2}$
x	$0 \longrightarrow 1$

$\dfrac{x+x^2}{\sqrt{2}}=0$　$\therefore$　$x=0$

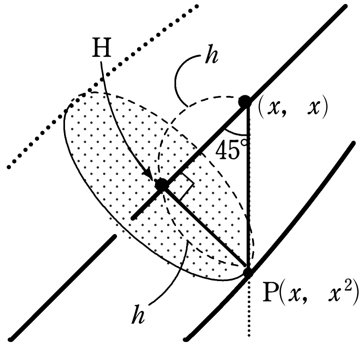
$\dfrac{x+x^2}{\sqrt{2}}=\sqrt{2}$

$x+x^2=2$

$x^2+x-2=0$

$(x-1)(x+2)=0$

$x>0$ より $x=1$



x で微分して　$\dfrac{dt}{dx}=\dfrac{1+2x}{\sqrt{2}}$

$$\therefore\quad dt=\frac{1+2x}{\sqrt{2}}dx$$

よって　$V=\pi\displaystyle\int_0^{\sqrt{2}} h^2dt$

$$=\pi\int_0^1\frac{(x-x^2)^2}{2}\cdot\frac{1+2x}{\sqrt{2}}dx$$

$$=\frac{\pi}{2\sqrt{2}}\int_0^1(x^2-3x^4+2x^5)dx$$

$$=\frac{\pi}{2\sqrt{2}}\left[\frac{x^3}{3}-\frac{3x^5}{5}+\frac{x^6}{3}\right]_0^1$$

$$=\frac{\sqrt{2}\,\pi}{60}$$