積分法とその応用【面積】　p.169～173

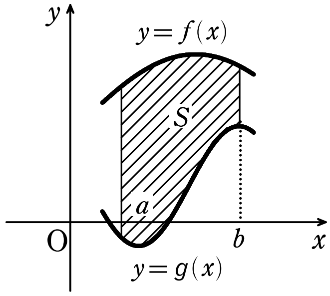
□面積

２曲線間の面積

区間 $a \leqq x \leqq b$ で常に $f(x) \geqq g(x)$ のとき，２つの曲線 $y=f(x)$，$y=g(x)$ と２直線 $x=a$，$x=b$ で囲まれた部分の面積 S は

数Ⅱと同じく，上－下

$$S=\int_a^b \{f(x)-g(x)\}dx$$



練習３４）　曲線 $y=e^x-e$ と x 軸および２直線 $x=0$，$x=2$ で囲まれた２つの部分の面積の和 S を求めよ。

解答　この曲線と x 軸の共有点の x 座標は，

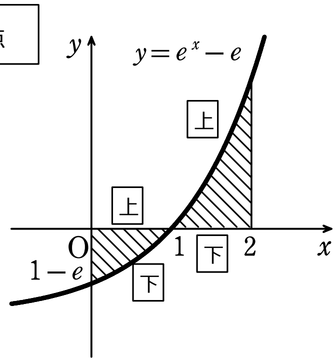
まずは交点

方程式　$e^x-e=0$　を解いて　　$x=1$

区間 $0 \leqq x \leqq 1$ では，常に $y \leqq 0$,

区間 $1 \leqq x \leqq 2$ では，常に $y \geqq 0$

であるから，求める面積の和 S は



$$S=\int_0^1\{0-(e^x-e)\}dx+\int_1^2\{(e^x-e)-0\}dx$$

$$=\int_0^1(-e^x+e)dx+\int_1^2(e^x-e)dx$$

$$=-\Big[e^x-ex\Big]_0^1+\Big[e^x-ex\Big]_1^2$$

$$=-\{(e-e)-(e^0-0)\}+\{(e^2-2e)-(e-e)\}$$

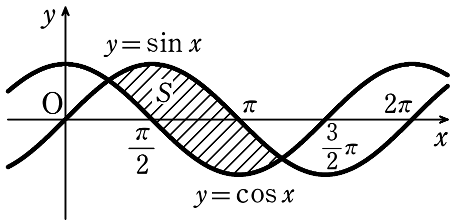
$$=1+e^2-2e$$

$$=e^2-2e+1$$

例題１２）　$0 \leqq x \leqq 2\pi$ の範囲において，

２つの曲線　$y=\sin x$，$y=\cos x$

で囲まれた右の図の斜線部分の面積 S を求めよ。



解答　２つの曲線の共有点の x 座標は，

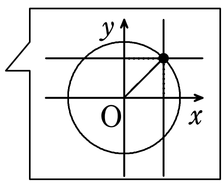
方程式 $\sin x=\cos x$ の解である。

$0 \leqq x \leqq 2\pi$ の範囲で解くと

■その１～合成して解く

$$\sin x-\cos x=\sqrt{2}\left(\sin x\cdot\frac{1}{\sqrt{2}}-\cos x\cdot\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$$

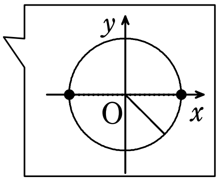
$$=\sqrt{2}\sin\left(x-\frac{\pi}{4}\right)=0$$



であるから

$-\frac{\pi}{4} \leqq x-\frac{\pi}{4} \leqq 2\pi-\frac{\pi}{4}$　より　$x-\frac{\pi}{4}=0,\ \pi$

$\therefore x=\frac{\pi}{4},\ \frac{5}{4}\pi$



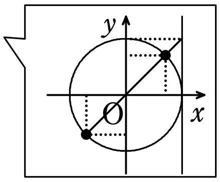
■その２～ $\tan x$ にして解く

方程式 $\sin x=\cos x$ は

$\frac{\sin x}{\cos x}=1$ より　$\tan x=1$ であるから

$0 \leqq x \leqq 2\pi$ の範囲で解くと

$\therefore x=\frac{\pi}{4},\ \frac{5}{4}\pi$



$\frac{\pi}{4} \leqq x \leqq \frac{5}{4}\pi$ では，$\sin x \geqq \cos x$ であるから

$$S=\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{5}{4}\pi}(\sin x-\cos x)dx$$

$$=\Big[-\cos x-\sin x\Big]_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{5}{4}\pi}$$

$$=\left(-\cos\frac{5}{4}\pi-\sin\frac{5}{4}\pi\right)-\left(-\cos\frac{\pi}{4}-\sin\frac{\pi}{4}\right)$$

$$=\left(\frac{\sqrt{2}}{2}+\frac{\sqrt{2}}{2}\right)-\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$$

$$=\sqrt{2}+\sqrt{2}$$

$$=2\sqrt{2}$$

積分法とその応用【面積】 p.169～173

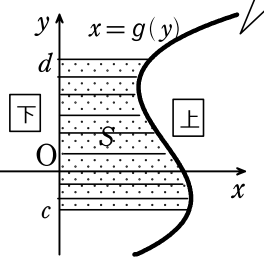
□曲線 $x=g(y)$ と面積

y の関数 $x=g(y)$ で表される曲線については，次のことが成り立つ。

区間 $c \leqq y \leqq d$ で常に $g(y) \geqq 0$ のとき，曲線 $x=g(y)$ と y 軸および 2 直線 $y=c$，$y=d$ で囲まれた部分の面積 S は

$$S=\int_c^d g(y)\,dy$$

$x=$(y の式) の形であることに注意
⇒範囲や dy



x，y の位置を入れ替える（裏から透かす）と「上ー下」がわかりやすいときの話

例１１） 曲線 $y=\log x$ と x 軸，y 軸および直線 $y=1$ で囲まれた部分の面積 S を求める。

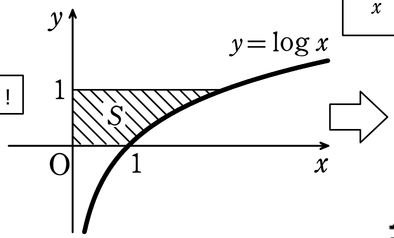
解答 $y=\log x$ より $x=e^y$

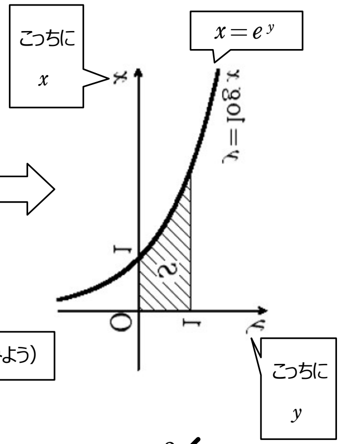
常に $e^y>0$ であるから

$$S=\int_0^1 e^y dy$$ dy に注意！

$$=\Big[e^y\Big]_0^1$$

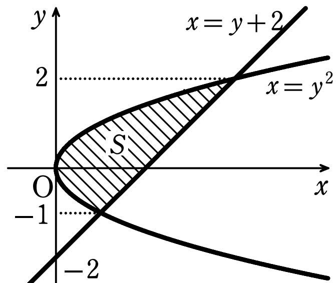
$$=e-1$$ 終





このまま $S=e\times 1-\int_1^e \log x\,dx$ ともできるが計算は面倒になる（余裕があれば試してみよう）

例題１３） 曲線 $x=y^2$ と直線 $x=y+2$ で囲まれた部分の面積 S を求めよ。



解答 曲線と直線の共有点の y 座標は，方程式 $y^2=y+2$ の解である。

$y^2-y-2=0$ より $(y-2)(y-1)=0$

∴ $y=-1,\ 2$

$-1 \leqq y \leqq 2$ では，$y+2 \geqq y^2$ であるから　dy に注意！

$$S=\int_{-1}^2 \{(y+2)-y^2\}dy$$

$$=\int_{-1}^2 (-y^2+y+2)dy$$

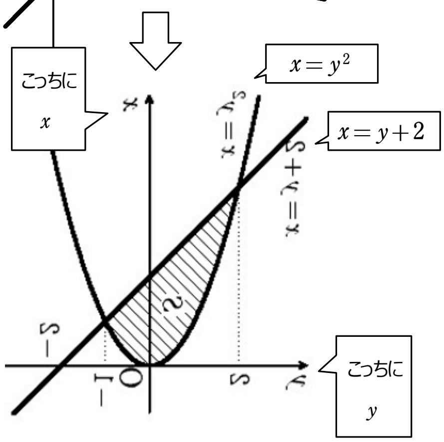
$$=\left[-\frac{y^3}{3}+\frac{y^2}{2}+2y\right]_{-1}^2$$

$$=\frac{9}{2}$$

$\frac{1}{6}$ 公式を使えば

$$\frac{|-1|}{6}\{2-(1)\}^3$$

$$=\frac{1}{6}\cdot 3^3=\frac{9}{2}$$



積分法とその応用【面積】　p.169～173

□いろいろな式で表される曲線と面積

応用例題８） $a>0$，$b>0$とする。楕円 $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$ で囲まれた図形の面積を求めよ

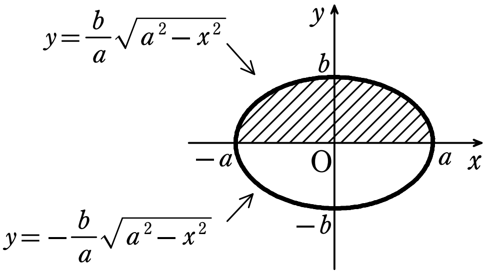
方針　この楕円は x 軸に関して対称である。$y\geqq 0$ のとき，方程式を y について解き，

$y\geqq 0$ の部分の面積を 2 倍すればよい。

ちなみに「上－下」をやっても
２倍となるので結果は同じ

解答　求める面積 S は，右の図の斜線部分の面積を 2 倍したものに等しい。

方程式をyについて解くと



$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$$

$$b^2x^2+a^2y^2=a^2b^2$$

$$a^2y^2=a^2b^2-b^2x^2$$

$$y^2=\frac{b^2(a^2-x^2)}{a^2}=\frac{b^2}{a^2}(a^2-x^2)$$

$$y=\pm\frac{b}{a}\sqrt{a^2-x^2}$$

$y\geqq 0$ のとき，　　$y=\dfrac{b}{a}\sqrt{a^2-x^2}$

$x=a\sin\theta$ と置くことも
考えられるが、楽な方法で。
ただしこの積分が円の面積を
指すことに触れておこう

よって

$$S=2\int_{-a}^{a}\frac{b}{a}\sqrt{a^2-x^2}\,dx=\frac{2b}{a}\int_{-a}^{a}\sqrt{a^2-x^2}\,dx$$

ここで，$\displaystyle\int_{-a}^{a}\sqrt{a^2-x^2}\,dx$ は，半径 a の円の面積の半分である。

したがって　　$S=\dfrac{2b}{a}\cdot\dfrac{1}{2}\pi a^2=\pi ab$

公式　楕円 $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$ で囲まれた図形の面積 S は，$S=\pi ab$ である

$b=a$ とすれば半径 a の円となり
$S=\pi a^2$ となる

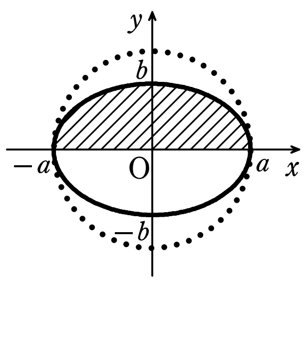
別解

楕円は円を圧縮（右図であれば縦方向に $\dfrac{b}{a}$ 倍）

したものであるから

$$S=\frac{b}{a}\times\pi a^2=\pi ab$$

となる



積分法とその応用【面積】　p.169〜173

応用例題９）

$a>0$ とする。$0\leqq\theta\leqq 2\pi$ において，サイクロイド

$$\begin{cases} x=a(\theta-\sin\theta) \\ y=a(1-\cos\theta) \end{cases}$$

と x 軸で囲まれた部分の面積 S を求めよ。

サイクロイド

方針　曲線と x 軸の共有点の x 座標は，

$x=0,\ 2\pi a$ であるから，

$S=\displaystyle\int_0^{2\pi a} y\,dx$ である。

これを置換積分法によって求める。

> $y=0$ と $y=a(1-\cos\theta)$ より
> $a(1-\cos\theta)=0$
> $a\neq 0$ なので
> $\cos\theta=1$
> $0\leqq\theta\leqq 2\pi$ において
> $\theta=0,\ 2\pi$
> このとき
> $x=a(0-\sin 0)=0$
> $x=a(2\pi-\sin 2\pi)=2\pi a$

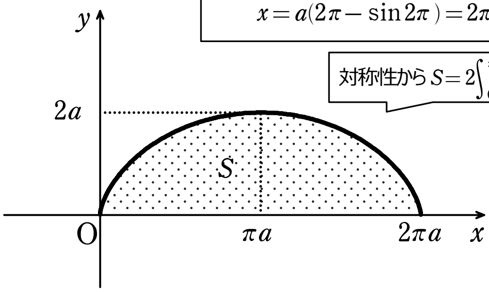
解答　求める面積は，右の図の斜線部分の面積であるから

$$S=\int_0^{2\pi a} y dx$$

また，$x=a(\theta-\sin\theta)$ より

$$\frac{dx}{d\theta}=a(1-\cos\theta)$$

$\therefore\quad dx=a(1-\cos\theta)d\theta$



対称性から $S=2\displaystyle\int_0^{\pi a} ydx$ でもよい

x と θ の対応は右のようになる。
よって，置換積分法により

x	$0\longrightarrow 2\pi a$
θ	$0\longrightarrow 2\pi$

> $x=0$ のとき
> $a(\theta-\sin\theta)=0$
> $a\neq 0$ より
> $\sin\theta=\theta$
> $\therefore\theta=0$
> $x=2\pi a$ のとき
> $a(\theta-\sin\theta)=2\pi a$
> $a\neq 0$ より
> $\theta-\sin\theta=2\pi$
> $\therefore\ \theta=2\pi$

$$\begin{aligned}
S&=\boxed{\int_0^{2\pi a}}\boxed{y}\boxed{dx}\\
&=\boxed{\int_0^{2\pi}}\boxed{a(1-\cos\theta)}\cdot\boxed{a(1-\cos\theta)d\theta}\\
&=a^2\int_0^{2\pi}(1-2\cos\theta+\underline{\underline{\cos^2\theta}})d\theta\\
&=a^2\int_0^{2\pi}\left(1-2\cos\theta+\underline{\underline{\frac{1+\cos 2\theta}{2}}}\right)d\theta\\
&=a^2\int_0^{2\pi}\left(\frac{3}{2}-2\cos\theta+\frac{1}{2}\cos 2\theta\right)d\theta\\
&=a^2\left[\frac{3}{2}\theta-2\sin\theta+\frac{1}{4}\sin 2\theta\right]_0^{2\pi}\\
&=a^2\{(3\pi-0+0)-(0-0+0)\}\\
&=3\pi a^2
\end{aligned}$$

$\sin 0=\sin 2\pi=0$ なので計算を略する