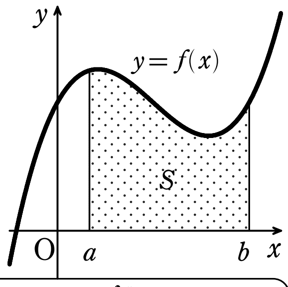
積分法とその応用【定積分と不等式】 p.165～167

□定積分と不等式



関数 $f(x)$ が区間 $[a,\ b]$ で連続であり，かつ $f(x) \geqq 0$ であるとき，$y=f(x)$ のグラフと x 軸および 2 直線 $x=a$，$x=b$ で囲まれた部分の面積 S について考える。

$[a,\ b]$ で常に $f(x)=0$ ならば $S=0$，$[a,\ b]$ で $f(x)>0$ となる x があるならば $S>0$ である。よって，次のことが成り立つ。

区間 $[a,\ b]$ でつねに $f(x) \geqq 0$ ならば

$$\int_a^b f(x)\,dx \geqq 0$$

等号は，常に $f(x)=0$ のときに成り立つ。

補足 別解　$F(x)=\int_a^x f(t)\,dt$ とおくと

$F(a)=0$ また $F'(x)=f(x) \geqq 0$ であり恒等的に $f(x)=0$ でないから $[a,\ b]$ において $F'(x)=f(x)>0$ となる区間があるので $F(b)>F(a)=0$

したがって $\int_a^b f(x)dx=F(b)-F(a)>0$

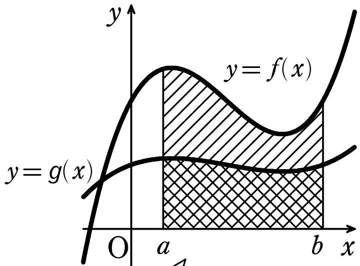
さらに次のことが成り立つ。

定積分と不等式

区間 $[a,\ b]$ で連続な関数 $f(x)$，$g(x)$ について

$f(x) \geqq g(x)$　**ならば**　$\displaystyle\int_a^b f(x)\,dx \geqq \int_a^b g(x)\,dx$

等号は，常に $f(x)=g(x)$ のときに成り立つ。



常に上下が変わらないなら面積の大小も確定する

例題１１） 次のことを示せ。

(1)　$x \geqq 0$ のとき　$\dfrac{1}{x^2+x+1} \geqq \dfrac{1}{(x+1)^2}$

(2)　$\displaystyle\int_0^1 \frac{dx}{x^2+x+1} > \frac{1}{2}$

(1)がないと，$\dfrac{1}{x^2+x+1}>g(x)$，$\displaystyle\int_0^1 g(x)\,dx=\frac{1}{2}$ を同時に満たすような関数 $g(x)$ を探さなければいけなく大変に

解答

(1)　$x \geqq 0$ のとき　$x^2+x+1 \leqq (x^2+x+1)+x$　　x の分大きい

すなわち　$x^2+x+1 \leqq (x+1)^2$

両辺は正であるから，逆数をとって

$$\frac{1}{x^2+x+1} \geqq \frac{1}{(x+1)^2}$$

深める　常には $\dfrac{1}{x^2+x+1}=\dfrac{1}{(x+1)^2}$ でないことを確かめた理由を説明してみよう。

(2)　(1) の不等式では，常には $\dfrac{1}{x^2+x+1}=\dfrac{1}{(x+1)^2}$ でないから　　等号は成立しない

$$\int_0^1 \frac{dx}{x^2+x+1} > \int_0^1 \frac{dx}{(x+1)^2}$$

常に同じではないので　面積（$\int_0^1 dx$ をつけた式）の大小が決まる

右辺は　$\displaystyle\int_0^1 \frac{dx}{(x+1)^2}=\int_0^1 (x+1)^{-2}dx=\Big[-(x+1)^{-1}\Big]_0^1=-\frac{1}{2}+1=\frac{1}{2}$

よって　$\displaystyle\int_0^1 \frac{dx}{x^2+x+1} > \frac{1}{2}$

別解 分母分子に 4 を掛けて $4(x^2+x+1)=(2x+1)^2+3$ として $2x+1=\sqrt{3}\tan\theta$ とおくと $\dfrac{\sqrt{3}}{9}\pi \fallingdotseq 0.6046$ となる

積分法とその応用【定積分と不等式】 p.165～167

問） $x \geqq 0$ のとき，$\dfrac{1}{(x+1)^2} \leqq \dfrac{1}{x^2+x+1} \leqq \dfrac{1}{x+1}$ であることを示し，

これを用いて不等式 $\dfrac{1}{2} < \displaystyle\int_0^1 \dfrac{dx}{x^2+x+1} < \log 2$ を証明せよ。

解答

x の分大きい　　x^2 の分大きい

$x \geqq 0$ であるから　$x^2+2x+1 \geqq x^2+x+1 \geqq x+1$

すなわち　$(x+1)^2 \geqq x^2+x+1 \geqq x+1$

各辺が正なので
逆数にすると大小反転

各辺の逆数をとると　$\dfrac{1}{(x+1)^2} \leqq \dfrac{1}{x^2+x+1} \leqq \dfrac{1}{x+1}$

が成り立つ。しかも，$0<x<1$ で等号は成り立たない。

等号は成立しない

つねに大小関係が成り立つので
$\displaystyle\int_0^1 dx$ をつけても　大小関係は変わらない

よって　$\displaystyle\int_0^1 \dfrac{dx}{(x+1)^2} < \int_0^1 \dfrac{dx}{x^2+x+1} < \int_0^1 \dfrac{dx}{x+1}$

$$\left[-\dfrac{1}{x+1}\right]_0^1 < \int_0^1 \dfrac{dx}{x^2+x+1} < \Big[\log(x+1)\Big]_0^1$$

$$\int_0^1 (x+1)^{-2}dx$$
$$=\Big[-1\cdot(x+1)^{-1}\cdot 1\Big]_0^1$$
$$=\left[-\dfrac{1}{x+1}\right]_0^1$$

ここで $\left[-\dfrac{1}{x+1}\right]_0^1 = -\dfrac{1}{2} - \left(-\dfrac{1}{1}\right) = -\dfrac{1}{2}+1 = \dfrac{1}{2}$

$$\Big[\log(x+1)\Big]_0^1 = \log 2 - \log 1 = \log 2$$

ゆえに　$\dfrac{1}{2} < \displaystyle\int_0^1 \dfrac{dx}{x^2+x+1} < \log 2$

積分法とその応用【定積分と不等式】　p.165～167

応用例題７） 関数 $f(x)=\dfrac{1}{x}$ の定積分を利用して，次の不等式を証明せよ。

$$\log n>\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\cdots\cdots+\frac{1}{n}>\log(n+1)$$ 　ただし，n は自然数

考え方　自然数 k に対して，$k\leqq x\leqq k+1$ では $f(x)\geqq f(k+1)$ である。

常には $f(x)=f(k+1)$ でないから，$\displaystyle\int_k^{k+1}f(x)\,dx>\int_k^{k+1}f(k+1)\,dx$ が成り立つ。

証明

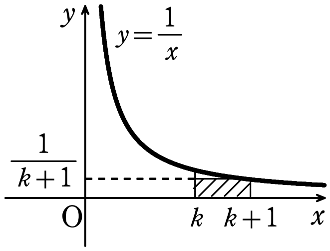
自然数 k に対して，$k\leqq x\leqq k+1$ では

$$\frac{1}{x}\geqq\frac{1}{k+1}$$

常には $\dfrac{1}{x}=\dfrac{1}{k+1}$ でないから

$$\int_k^{k+1}\frac{1}{x}dx>\int_k^{k+1}\frac{1}{k+1}dx$$

隙間の分だけ差がある

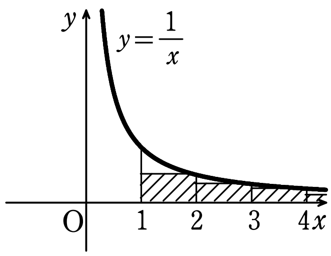


すなわち

$$\int_k^{k+1}\frac{dx}{x}>\frac{1}{k+1}$$

$$\int_k^{k+1}\frac{1}{k+1}dx=\frac{1}{k+1}\int_k^{k+1}dx$$
$$=\frac{1}{k+1}\Big[x\Big]_k^{k+1}=\frac{1}{k+1}(k+1-k)=\frac{1}{k+1}$$

$k=1$，2，3，……，$n-1$ として，辺々を加えると



$$\int_1^2\frac{dx}{x}+\int_2^3\frac{dx}{x}+\int_3^4\frac{dx}{x}+\cdots\cdots+\int_{n-1}^{\boxed{n}}\frac{dx}{x}>\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\cdots\cdots+\frac{1}{n}$$

ここで　　左辺 $\displaystyle=\int_1^{\boxed{n}}\frac{dx}{x}=\Big[\log|x|\Big]_1^n=\log n-\log 1=\log n$

$\log 1=0$

よって　　$\log n>\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{3}+\dfrac{1}{4}+\cdots\cdots+\dfrac{1}{n}$

補足